

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE TITRE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par
Alphonse DECK

1^{re} THÈSE : Contribution à l'étude d'une méthode semi-automatique d'appropriation des forces d'excitation dans l'essai au sol d'une structure d'avion.

2^e THÈSE : Influence d'un champ magnétique sur les propriétés de transport des gaz formés de molécules polyatomiques.

Soutenues le 18 Juin 1968 devant la Commission d'examen.

MM. TAVERNIER Président.

MAZET

De VRIES

DELATTRE

} Examineurs.

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc
1968

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE TITRE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par
Alphonse DECK

1^{re} THÈSE : Contribution à l'étude d'une méthode semi-automatique d'appropriation des forces d'excitation dans l'essai au sol d'une structure d'avion.

2^e THÈSE : Influence d'un champ magnétique sur les propriétés de transport des gaz formés de molécules polyatomiques.

Soutenues le 18 Juin 1968 devant la Commission d'examen.

MM. TAVERNIER Président.

MAZET

De VRIES

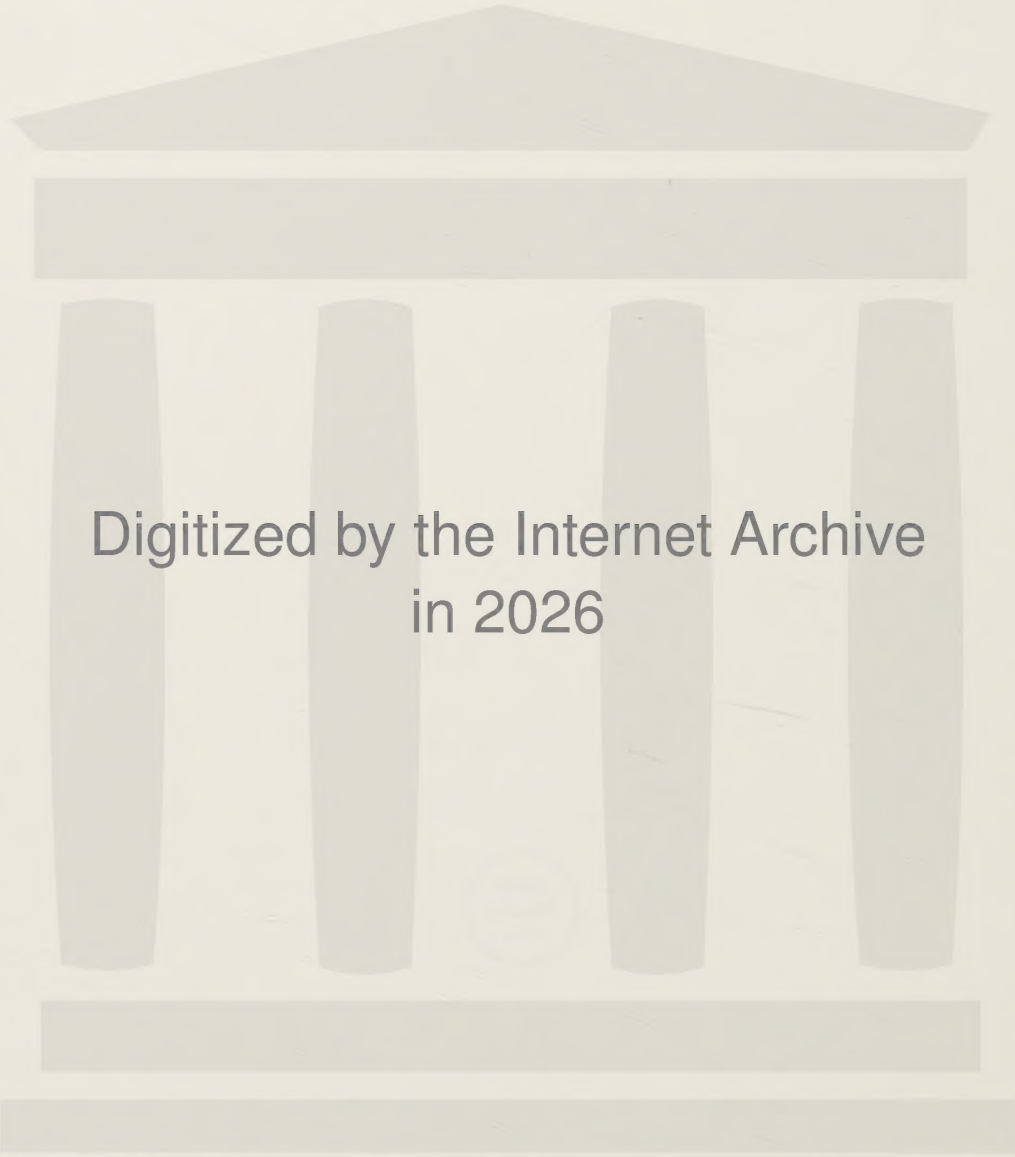
DELATTRE

} Examineurs.

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc
1968



A la mémoire de Gerhard de VRIES



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554033_0027

AVANT PROPOS

Ce travail a été effectué à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, dans les Directions "Physique Générale" et "Résistance des Structures".

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Jean TAVERNIER d'avoir bien voulu patronner cette thèse et de m'avoir donné des conseils éclairés.

Je remercie vivement M. DELATTRE qui m'a permis de commencer ce travail dans sa division, ainsi que ses collaborateurs MM. BEAUSSIER, GOBIN et PLANTIN dont les conseils m'ont été précieux.

J'exprime ma profonde reconnaissance à M. de VRIES qui m'a initié à la mécanique vibratoire des structures d'avions et qui fut à l'origine de ce travail. Je le remercie pour ses conseils et son soutien tout au long de cette étude.

TABLE DES MATIERES

	Pages
RESUME.....	5
1 - <u>RAPPELS SUR LA METHODE GLOBALE D'ESSAI EN</u>	
<u>VIBRATIONS D'UNE STRUCTURE MECANIQUE</u>	6
1.1. - Principe.....	6
1.2. - But.....	6
1.3. - Les procédés expérimentaux.....	7
2 - <u>LE PROBLEME DE L'APPROPRIATION DES FORCES</u>	
<u>D'EXCITATION A UN MODE DE VIBRATION CONSIDERE</u>	8
2.1. - Origine du problème.....	8
2.2. - Possibilité théorique du problème.....	8
2.3. - Pose et définition du problème réel de l'appropriation.....	9
2.4. - Analyse de quelques méthodes d'appropriation	10
2.4.1. - Appropriation empirique.....	10
2.4.2. - Méthodes expérimentales systématiques et d'asservissement.....	10
2.4.3. - Méthodes semi-théoriques.....	11
2.4.4. - Excitation d'un mode de vibration par auto-oscillation.....	13

3 - <u>ETUDE D'UNE METHODE SYSTEMATIQUE</u>	14
3.1. - <u>Introduction</u>	14
3.2. - <u>Méthode initiale</u>	14
3.2.1. - Proposition de principe.....	14
3.2.2. - Analyse du choix de la grandeur $R = \sum_{i=1}^n R_i \sin \varphi_i $	15
3.2.3. - Etude théorique de $R = g(F_j)$	16
3.2.3.1. - Expérience préliminaire.....	16
3.2.3.2. - Etude théorique de $R = g(F_j)$	16
3.2.3.3. - Remarques importantes.....	24
3.2.4. - Etude expérimentale de la fonction $R = g(F_j)$ et première application de la méthode d'appropriation.....	24
3.2.4.1. - Description du montage expérimental....	24
3.2.4.2. - Relevés expérimentaux de $R = g(F_j)$ et évolution de l'appropriation.....	25
3.2.4.3. - Détermination pratique du minimum de la courbe $R = g(F_j)$	26
3.3. - <u>Proposition d'un nouveau processus de réglage des forces d'excitation</u>	26
3.3.1. - Remarque préliminaire.....	26
3.3.2. - Détermination systématique de l'abscisse du point I.....	29
3.3.2.1. - Principe des opérations.....	29
3.3.2.2. - Mode opératoire.....	30

3.4. - <u>Influence des écarts entre une structure physique et son moule mathématique sur l'application pratique de la méthode d'appropriation.....</u>	32
3.4.1. - Introduction.....	32
3.4.2. - Détermination pratique de F_j optimale par interpolation.....	32
3.4.3. - Effet local d'une force d'excitation.....	32
3.4.4. - Effet des non-linéarités sur la fréquence propre d'un mode de vibration. Détermination de la fréquence propre optimale.....	33
3.5. - <u>Etude de la convergence de la méthode d'appropriation.....</u>	36
3.5.1. - Rappel.....	36
3.5.2. - Interprétation géométrique de la convergence.....	36
3.5.3. - Démonstration de la non-divergence du processus d'appropriation.....	37
3.5.4. - Etude expérimentale de la convergence....	38
3.5.4.1. - Introduction.....	38
3.5.4.2. - Appropriation de l'excitation au mode de fréquence propre $f_0 = 23,54 \text{ Hz}$	38
3.5.4.3. - Appropriation de l'excitation au mode de fréquence propre $f_0 = 27,18 \text{ Hz}$	41

4 - <u>PROPOSITION D'UNE INSTALLATION DESTINEE A RENDRE</u>	
<u>LE PROCESSUS ETUDIE OPERATIONNEL</u>.....	42
4.1. - <u>Introduction</u>	42
4.2. - <u>Bloc diagramme fonctionnel de l'installa- tion projetée</u>	42
4.3. - <u>Analyse de la réponse de la structure par échantillonnage</u>	42
4.3.1. - <u>Introduction</u>	42
4.3.2. - <u>Méthode classique</u>	43
4.3.3. - <u>Méthode par échantillonnage synchrone multiple de la réponse</u>	44
4.3.3.1. - <u>Approximation d'une fonction par un développement de Fourier limité. Rappels</u>	44
4.3.3.2. - <u>Application à la détermination de α_1 et b_1 dans le cas de $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$</u>	44
4.3.3.3. - <u>Intérêt du procédé par échantillonnage multiple</u>	46
4.3.3.4. - <u>Réalisation d'un dispositif d'échan- tillonnage synchrone. Résultats expérimentaux</u>	47
4.4. - <u>Organigramme des opérations à effectuer par l'unité centrale lors du processus d'appro- priation</u>	49
5 - <u>CONCLUSION GENERALE</u>.....	50
BIBLIOGRAPHIE.....	51

RÉSUMÉ

Après un bref rappel de la "méthode globale" d'essais en vibration, on examine la possibilité théorique d'isoler un mode propre de vibration sur une structure complexe. Le problème pratique d'isolement d'un mode, ainsi que l'examen critique de quelques méthodes d'appropriation existantes, sont ensuite abordés.

La note se poursuit par l'étude théorique et expérimentale d'une méthode itérative systématique d'appropriation de l'excitation. Cette méthode permet de déterminer les forces d'excitation isolant un mode à sa fréquence propre, ainsi que cette fréquence elle-même.

Le travail se termine par le projet d'une installation destinée à rendre le processus étudié opérationnel, ainsi que par l'étude d'une méthode d'analyse de la réponse de la structure par échantillonnage synchrone de cette réponse. L'organe central de cet ensemble est constitué par un calculateur numérique électronique du type "industriel".

Mots-clés (thésaurus CEDOCAR) :

Essais sol - Vibration - Structures - Méthodes procédés numériques - Méthodes itératives.

CONTRIBUTION TO THE STUDY OF A SEMI-AUTOMATIC METHOD FOR THE APPROPRIATION OF THE EXCITATION FORCES IN AIRPLANE GROUND VIBRATION TESTS

SUMMARY

Following a brief survey of the vibration tests by the "global method", the theoretical possibility of separating a vibration natural mode in a complex structure is examined. The practical problem for separating a mode, as well as the critical analysis of the existing appropriation methods are discussed.

The theoretical and experimental study of a systematic iteration method of appropriation of the excitation is exposed. This method leads to the determination of the excitation forces separating a mode at its natural frequency, as well as to the determination of this frequency.

Finally, the project of a set up which should make operational the process studied is exposed as well as the study of a method for analysing the response of the structure by means of a synchronous sampling of this response. The central component of this set up is constituted by a digital computer of the industrial type.

Key words (NASA thesaurus) :

Ground tests - Vibration tests - Structural vibration - Vibration mode - Harmonic excitation - Shakers - Numerical analysis - Iterative solution. Iteration.

1 - RAPPELS SUR LA METHODE GLOBALE D'ESSAI EN VIBRATION D'UNE STRUCTURE MECANIQUE.

1.1. - Principe :

L'étude mécanique d'une structure linéaire complexe dans la base naturelle présente des difficultés théoriques et expérimentales considérables. Cette étude se simplifie lorsque l'on adopte comme nouvelle base de représentation les formes propres de vibrations de la structure conservative associée qui constituent une base orthonormée [1] [2]. Dans ces conditions le problème complexe initial peut être subdivisé en une série de problèmes élémentaires dont l'étude théorique et expérimentale est plus simple. Dans cette nouvelle base, le système linéaire à amortissement visqueux sans sollicitations extérieures peut être décrit du point de vue vibratoire, pour de faibles amplitudes, par l'équation matricielle suivante :

$$(1) \quad [\mu] \ddot{q} + [\beta] \dot{q} + [\gamma] q = 0$$

$[\mu]$, $[\beta]$ et $[\gamma]$ étant respectivement les matrices des masses, des amortissements et des raideurs généralisées, q la matrice colonne des coordonnées généralisées, $\dot{q}$ et $\ddot{q}$ leurs dérivées premières et secondes.

1.2. - But :

Le but de l'essai global est de déterminer expérimentalement les formes propres de vibrations du système sans amortissements, les fréquences propres correspondantes, ainsi que tous les paramètres entrant dans les tableaux matriciels précédents [3]. La connaissance complète de l'équation (1) permet alors de déterminer par le calcul la réponse du système à une sollicitation quelconque, mais parfaitement définie dans le temps.

Dans le cas particulier d'une structure d'avion, la connaissance de l'équation (1) relative à l'avion au repos ainsi que celle de certains coefficients aérodynamiques permet d'effectuer les calculs d'instabilité de la structure lorsque celle-ci est placée dans un vent relatif et de déceler ainsi les risques de flottement qui pourraient être à l'origine d'accidents en cours de vol.

1.3. - Les procédés expérimentaux :

Un système mécanique linéaire et continu peut être décrit, avec une très bonne approximation, par ses n premiers modes de vibration. Chaque mode peut alors être isolé expérimentalement par une série de forces harmoniques appropriées à ce mode et à ce mode seulement. Dans ces conditions, chaque point de la structure vibre suivant la même loi qu'un système à un degré de liberté. Des méthodes expérimentales permettent alors de déterminer simplement les grandeurs attachées à chaque mode de vibration [4] . Cette détermination fait appel à une installation d'excitation et de mesure relativement complexe et en amélioration constante.

2 - LE PROBLEME DE L'APPROPRIATION DES FORCES D'EXCITATION

A UN MODE DE VIBRATION CONSIDERE.

2.1. - Origine du problème :

Pour étudier expérimentalement un mode de vibration d'une structure linéaire, il est possible de solliciter cette dernière avec une seule force harmonique dont la fréquence est aussi voisine que possible de la fréquence propre du système non amorti. Avec ce mode d'excitation l'analyse de la réponse est complexe, car la participation des autres modes dans la réponse de la structure n'est pas négligeable.

La tendance actuelle [5] est de solliciter un mode propre de vibration en excitant la structure simultanément en plusieurs points par des forces harmoniques de niveau réglable, pilotées par un générateur commun. Cette façon de procéder demande un appareillage d'excitation plus important. Ce procédé permet cependant de diminuer dans la réponse de la structure la contribution des modes non désirés et facilite ainsi l'analyse de celle-ci tout en augmentant la précision de la détermination des formes propres et des paramètres structuraux relatifs aux différents modes de vibration. Par contre, la difficulté qu'il y a à déterminer la configuration des forces d'excitation isolant un mode de vibration considéré a engendré un problème nouveau.

2.2. - Possibilité théorique du problème :

Soit un système mécanique linéaire de degré n avec amortissement visqueux. Il est possible, avec un groupe de n forces harmoniques réelles et de même fréquence d'isoler un mode de vibration non amorti à sa fréquence propre [6] [7] [8]. Dans ces conditions les vitesses de tous les points du système sont en phase (à π près) avec la référence des forces d'excitation.

Lorsqu'il n'existe aucun couplage visqueux entre les différents modes de vibration (Hypothèse de Basile vérifiée, c'est-à-dire quand la matrice [A] est diagonale), le même groupe de forces réelles isole le mode propre non amorti considéré à toute autre fréquence d'excitation. Tous les points de la structure vibrent alors en phase entre eux et leur phase commune présente un certain déphasage avec la référence de l'excitation. La forme de vibration reste alors, à un facteur près, identique à la forme propre du système conservatif associé.

Lorsqu'il existe des couplages du type visqueux entre les différents modes de vibrations (La matrice [A] n'est pas diagonale), il n'est possible d'isoler un mode propre du système conservatif

associé avec un groupe de forces réelles qu'à sa fréquence naturelle. Par contre, il est possible, avec un groupe de forces réelles, de trouver un mode de réponse équiphasé à une fréquence autre que la fréquence propre du mode non amorti, mais la forme de vibration ainsi obtenue ne peut s'identifier à une forme propre du système non amorti. Il est cependant possible, avec un groupe de n forces complexes, d'isoler un mode propre de vibration à une fréquence autre que la fréquence propre du système non amorti. Un tel mode d'excitation est identique dans son principe aux procédés de réinjection qui, par l'adjonction d'une structure fictive à la structure réelle, constitue une structure globale dont l'amortissement (par exemple) est tel que [8] soit diagonale [9]. Dans ces conditions, l'isolement d'une forme propre du système non amorti redevient possible à une fréquence quelconque avec un groupe de forces uniquement réelles.

2.3. - Pose et définition du problème réel de l'appropriation :

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que dans le cas général d'une structure ne répondant pas à l'hypothèse de Basile l'obtention d'une réponse équiphasée n'est pas un critère d'obtention d'une forme propre de vibration du système non amorti, sauf dans le cas où la fréquence d'excitation se confond avec la fréquence naturelle du mode propre non amorti. Dans ce cas particulier de réponse équiphasée où la vitesse de tous les points est en phase (à π près) avec la référence des forces d'excitation, le critère d'une réponse équiphasée est un critère nécessaire et suffisant d'isolement d'un mode propre non amorti à sa fréquence naturelle. Dans ces conditions, la forme propre peut être isolée avec un groupe de n forces harmoniques réelles dont la fréquence est celle du mode propre non amorti et dont le signe et le niveau sont à déterminer.

Dans le cas d'une structure continue physique la configuration du système discret de remplacement est a priori inconnue, il se pose donc le problème du nombre et du point d'application des différentes forces d'excitation. D'autre part, à la suite de certaines non-linéarités de la structure mécanique, la fréquence naturelle d'un mode de vibration est fonction de l'amplitude de sa réponse, celle-ci étant directement fonction de la configuration des forces d'excitation, la recherche de la fréquence propre du mode non amorti est liée à la recherche du niveau des différentes forces d'excitation. En résumé, sur une structure mécanique physique, une fois le critère d'isolement d'un mode propre retenu, il se pose trois problèmes :

- Détermination de la fréquence propre optimale du mode non amorti. (Pour un niveau de réponse donné, pour l'emplacement et le nombre des capteurs considérés et pour une appropriation à la résonance on lie la fréquence propre optimale à un minimum d'écart avec la théorie).

- Recherche du nombre et des points d'application des différentes forces d'excitation.

- Détermination de l'amplitude et du signe des différentes forces réelles mises en oeuvre.

L'ensemble de ces problèmes constitue le "problème de l'appropriation" de l'excitation, à la résonance de phase, à un mode propre de vibration dans l'essai d'une structure mécanique sensiblement linéaire.

2.4. - Analyse de quelques méthodes d'appropriation :

2.4.1. - Appropriation empirique.

Le moyen le plus simple d'isoler expérimentalement, par tâtonnements, un mode propre de vibration par des forces harmoniques réelles est fondé sur le critère de la résonance de phase en vitesse. Les déphasages entre les vitesses en certains points de la structure et la référence de phase des forces d'excitation sont visualisés simultanément à l'aide d'un commutateur électronique [10] sur l'écran d'un tube cathodique sous la forme d'ellipses de Lissajous. L'opérateur dose le niveau des différentes forces et ajuste la fréquence d'excitation afin de réduire au mieux les différents déphasages. Cette méthode permet de réaliser une première appropriation qui est suffisante dans certains cas.

2.4.2. - Méthodes expérimentales systématiques et d'asservissement.

Plusieurs méthodes expérimentales systématiques d'appropriation ont été proposées. Nous insisterons spécialement sur deux d'entre elles qui ont été rendues opérationnelles sur des structures d'avion.

Dès 1950, les chercheurs du M. I. T. [11] se sont penchés sur le problème. Avec l'hypothèse d'une viscosité structurale ayant la même répartition que la distribution massique (Hypothèse de Basile), la structure est excitée par 24 forces harmoniques réelles pilotées par un générateur commun. L'amplitude et le signe des différentes forces sont réglables séparément. A chaque excitateur est associé un capteur de vitesse. Le critère de phase n'est pas retenu pour le réglage des différents niveaux d'excitation. Le niveau et le signe des forces sont déterminés par le critère d'avoir en un point d'excitation une amplitude de réponse proportionnelle à la force d'excitation correspondante, le facteur de proportionnalité étant le même aux différents points d'excitation. Le critère de phase n'intervient que dans l'ajustement final de la fréquence d'excitation qui doit réduire au mieux l'ouverture des ellipses de Lissajous réalisées avec le signal vitesse aux différents points de la structure et la référence d'excitation. Les différentes opérations de réglage et d'ajustement se font successivement et manuellement.

En 1965, les chercheurs du R. A. E. ont mis au point une méthode fondée sur l'utilisation d'un double asservissement analogique à boucles multiples [12]. La structure est excitée par un certain nombre d'excitateurs pilotés par un générateur harmonique commun. A chaque excitateur est associé un capteur de vitesse. A chaque ensemble capteur-excitateur est associée une chaîne d'asservissement analogique qui régule le niveau de la force d'excitation en chaque point avec, pour consigne, de garder la vitesse de la structure au point considéré en phase avec la force d'excitation correspondante.

A un point représentatif est appliquée une force sinusoïdale de niveau constant. Le prélèvement du signal vitesse en ce même point permet d'asservir la fréquence d'excitation de sorte que la vitesse au point considéré soit toujours en phase avec la référence d'excitation. Le niveau et le signe des différentes forces d'excitation sont d'abord réglés successivement d'une façon manuelle, les asservissements n'étant mis en route qu'après ce réglage préalable.

Dans les méthodes précédentes, le niveau des différentes forces d'excitation, ainsi que la fréquence propre optimale, sont déterminés expérimentalement sur les lieux de l'essai dans un temps relativement court. Ces méthodes sont applicables même si l'hypothèse d'une structure linéaire n'est pas rigoureusement respectée. Lorsque la tentative de réglage d'une force d'excitation en un point considéré n'améliore pas le degré d'isolement de la forme propre étudiée, la force correspondante est appliquée en un autre point de la structure où sa contribution à l'isolement de la forme propre étudiée est plus positive.

Par contre, la nécessité d'adjoindre un excitateur à un capteur ne permet de contrôler la réponse qu'en un nombre limité de points (limitation matérielle du nombre d'excitateurs). Or, il est nécessaire de connaître la réponse en certains points autres que les points d'excitation et de tenir compte de la réponse en ces points dans le réglage du niveau et de la fréquence des forces d'excitation. Dans la pratique, lorsque deux modes propres ont des fréquences voisines, la convergence vers la forme propre désirée n'est pas toujours assurée.

2.4.3. - Méthodes semi-théoriques.

Les méthodes évoquées dans ce paragraphe nécessitent des moyens de calcul numériques relativement importants et exigent un comportement physique de la structure plus conforme au moule mathématique que les méthodes précédentes. L'opération d'appropriation nécessite ici un temps plus long et le traitement des données recueillies au cours d'expériences préliminaires ne peut s'effectuer que dans un centre de calcul. Le critère d'isolement retenu est celui de la résonance de phase.

A l'O. N. E. R. A., une telle méthode a été étudiée par Monsieur Clerc [15] [14]. Cette méthode s'appuie sur le théorème de superposition applicable aux systèmes linéaires et comporte deux phases :

- Une phase expérimentale au cours de laquelle on mesure les réponses de la structure à plusieurs sollicitations harmoniques réelles comportant des dosages distincts des forces d'excitation, et ceci à différentes fréquences.

- Une phase de calcul, qui à partir des mesures brutes précédentes permet, par la résolution d'un problème, ramené, par l'auteur, à un calcul de valeurs propres, de calculer le dosage optimal des forces d'excitation à appliquer à la structure, de déterminer la fréquence propre la plus vraisemblable et de calculer quel serait la réponse correspondante de la structure sous cette forme de sollicitation.

Il est donc théoriquement inutile de procéder à une nouvelle phase expérimentale. La méthode est applicable dans l'hypothèse d'une structure linéaire amortie, sans que l'hypothèse de Basile soit respectée, même lorsque deux modes de vibration ont des fréquences propres identiques. Cette méthode n'a cependant pas encore été vérifiée expérimentalement sur une structure mécanique.

Une méthode analogue a été étudiée par le "Australian Defence Scientific Service" [15] [16]. Cette méthode est applicable à une structure linéaire même lorsque l'amortissement n'est plus du type visqueux. Elle comporte deux phases :

- Une phase expérimentale de mesure de la réponse de la structure à différentes configurations de forces réelles linéairement indépendantes à la fréquence du mode propre non amorti, déterminée par la méthode de Kennedy et de Pancu [17].

- Une phase de calcul permettant de déterminer les coefficients d'une combinaison linéaire des forces qui exciteront le mode propre de vibration étudié d'une façon optimale avec un procédé d'optimisation différent de celui de la méthode précédente. Cette méthode a été vérifiée expérimentalement sur une structure mécanique, mais n'a pas donné des résultats entièrement satisfaisants. Cet insuccès s'explique, en partie, par le fait que le critère de Kennedy et de Pancu est très sensible à la non-linéarité.

2.4.4. - Excitation d'un mode de vibration par auto-oscillation.

Dans toutes les méthodes examinées les forces d'excitation sont pilotées par un générateur harmonique autonome. Il est cependant possible de remplacer le générateur par un signal harmonique de référence obtenu par sommation analogique, après pondération, des signaux de vitesse provenant de capteurs répartis sur la structure. Une fois le régime oscillant stationnaire obtenu à une fréquence voisine de la fréquence propre du mode non amorti, l'isolement de ce mode est obtenu par réglage du niveau des différentes forces d'excitation. Un tel procédé a été étudié par G. de Vries de l'O. N. E. R. A. et constitue un cas particulier de la méthode de réinjection [9] . C'est la seule méthode qui modifie la matrice $[\beta]$.

3 - ETUDE D'UNE METHODE SYSTEMATIQUE.

3.1. - Introduction :

La quantité et la précision croissante des informations demandées à un essai de vibrations au sol d'une structure d'avion dans les meilleurs délais ont amené les ingénieurs à envisager l'introduction des techniques numériques modernes du traitement de l'information dans les installations d'essais. L'organe central d'une telle installation étant constituée par un calculateur du type industriel, il est judicieux de bénéficier des possibilités nouvelles offertes par la présence d'un tel élément pour aborder le problème de l'appropriation sous un angle nouveau.

Avant de procéder aux différentes mesures relatives à un mode de vibration, il est nécessaire de l'isoler par une excitation appropriée. Il est donc important de résoudre le problème rapidement et sur les lieux de l'essai en utilisant les possibilités de l'installation implantée dans une remorque laboratoire indépendante. Le problème de l'appropriation doit être résolu au mieux, car la précision et la signification des mesures ultérieures en sont directement fonction.

D'autre part, une structure réelle complexe présente des écarts sensibles avec le moule mathématique simple qui lui est associé (Non-linéarité, non-fidélité, influence des conditions extérieures, etc...). Une méthode d'appropriation, pour être exploitable pratiquement doit être fondée théoriquement, mais il est essentiel que, dans son application, on puisse tenir compte des anomalies non formulées dans le moule mathématique.

3.2. - Méthode initiale :

3.2.1. - Proposition de principe.

G. de Vries de l'O. N. E. R. A. a proposé le principe d'une méthode semi-automatique devant permettre de réaliser l'appropriation de l'excitation sur les lieux de l'essai, dans un temps raisonnable, avec un équipement relativement modeste.

La structure étant excitée à la fréquence propre présumée d'un des modes de vibration par un certain nombre de forces réelles, cette méthode consiste

- à élaborer la grandeur $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|$, $A_i \sin \varphi_i$ étant la composante imaginaire dans le plan complexe de la vitesse en un point i de la structure ;

- à voir si, en fonction de la variation du niveau de l'une des forces d'excitation, la grandeur R passe par un minimum ;
- à fixer la force considérée à cette valeur remarquable ;
- à passer au réglage du niveau de l'excitateur suivant, le processus se poursuivant jusqu'au dernier excitateur.

Cette proposition originale fut à l'origine de l'étude qui va suivre.

3.2.2. - Analyse du choix de la grandeur $R = \sum_{i=1}^n |R_i \sin \varphi_i|$

Supposons que l'on ait trouvé la configuration idéale des forces d'excitation qui isole un mode propre non amorti à sa fréquence propre f_j . Dans ces conditions les vitesses de tous les points de la structure sont en phase (à π près) avec la référence de l'excitation. En désignant par la matrice colonne $|F|$ idéale, cette configuration idéale de l'excitation et en appelant φ_i le déphasage de la vitesse au point i de la structure par rapport à la référence de l'excitation, nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$|F|_{\text{idéale}} \iff \text{Pour } f = f_j, \varphi_i = 0 \text{ (ou } \pi) \text{ quel que soit le point } i$$

A priori, la matrice $|F|_{\text{idéale}}$ est inconnue. Désignons par $|F|_{\text{appliquée}}$, la matrice des forces d'excitation effectivement appliquées. La conséquence d'une telle excitation est que φ_i n'est en général pas nulle quel que soit le point i considéré de la structure. La grandeur $R' = \sum_{i=1}^n |\varphi_i|$ pourrait servir à chiffrer l'écart entre

$|F|_{\text{idéale}}$ et $|F|_{\text{appliquée}}$, c'est-à-dire le degré de présence dans la réponse de la structure des modes de vibrations non désirés et considérés comme parasites.

Mais pour que la grandeur $R' = \sum_{i=1}^n |\varphi_i|$ reflète fidèlement le degré de participation des modes parasites dans la réponse de la structure, il y aurait lieu de retrancher la valeur π à certaines phases. D'autre part, l'exploitation des mesures relatives aux formes propres de vibration dans le calcul de flottement montre qu'il est important d'avoir aux points de grandes amplitudes des déphasages négligeables alors que la présence d'un déphasage appréciable aux points de faibles amplitudes est d'importance moindre. Il convient donc de pondérer le déphasage en un point i de la structure, qui en

pratique n'est jamais rigoureusement nul, par un coefficient proportionnel à l'amplitude du mouvement du point i considéré.

Le choix de la grandeur $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|$ satisfait aux remarques précédentes. En outre, il sera montré par la suite que la grandeur $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|$ possède des propriétés remarquables et peut s'élaborer techniquement sans grande difficulté.

La grandeur $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|$ peut alors servir à apprécier simplement et globalement le degré d'appropriation de l'excitation à la fréquence de résonance du mode propre non amorti puisque il y a équivalence entre le fait que $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i| > 0$ et que $|F| \xrightarrow{\text{appliquée}} |F|_{\text{idéale}}$.

3.2.3. - Etude théorique de la variation de $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|$ en fonction du niveau d'une des forces excitatrices F_j du système mécanique.

3.2.3.1. - Expérience préliminaire.

Le tracé, à partir de mesures faites sur une partie d'un avion réel, de 2 courbes expérimentales représentant les évolutions de $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|$ en fonction de la variation successive du niveau de 2 forces excitatrices F_1 et F_2 , a donné les résultats de la fig. 1. Rappelons que $A_i \sin \varphi_i$ est, dans le plan complexe, la composante imaginaire de la vitesse du mouvement d'un point i de la structure mécanique.

Chacune de ces courbes présente essentiellement un minimum unique et deux branches sensiblement linéaires. L'une d'elles présente en outre, une anomalie par rapport à l'autre, aux faibles niveaux de l'excitation. Les lois de variations de $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|$ en fonction de F_1 et F_2 , obtenues pour deux modes d'une maquette, ne présentent un intérêt que si elles sont générales. Pour nous en assurer, nous allons procéder à une étude théorique de la grandeur R en associant à la structure mécanique réelle un moule mathématique linéaire.

3.2.3.2. - Etude théorique de $R = g(F_j)$.

Nous allons dans un premier temps, pour une fréquence d'excitation donnée, calculer les vitesses de déplacement en différents points de la structure en fonction des forces d'excitation.

Une structure mécanique linéaire, à amortissement visqueux et soumise à des forces d'excitation harmoniques réelles est régie

par l'équation :

$$(2) \quad [\mu] \ddot{q} + [\beta] \dot{q} + [\gamma] q = [\alpha] F e^{j\omega t}$$

avec

$[\mu]$ matrice diagonale réelle des masses généralisées ;
 $[\gamma]$ matrice diagonale réelle des raideurs généralisées ;
 $[\beta]$ matrice symétrique réelle des viscosités généralisées ;
 $|\ddot{q}|, |\dot{q}|$ et $|q|$ étant les matrices colonnes des accélérations, des vitesses et des déplacements généralisés.

$[\alpha]$ la matrice transposée de la matrice $[\alpha]$ carrée des formes propres ;

$|F|$ la matrice colonne réelle des forces appliquées de pulsation ω .

Le système étant linéaire et soumis à des forces harmoniques de pulsation ω , les grandeurs q , $\dot{q}$ et $\ddot{q}$ seront harmoniques de pulsation ω . Cette remarque va nous permettre de ne plus tenir compte des fonctions du temps dans l'étude du système (2). De cette même remarque et en posant $|q| = |q_0| e^{j\omega t}$ où $|q_0|$ n'est plus fonction du temps t , il résulte que : $|q_0| = \frac{|\dot{q}_0|}{j\omega}$ et $|\ddot{q}_0| = j\omega |\dot{q}_0|$

Dans ces conditions l'équation (2) s'écrit :

$$(3) \quad \left\{ j\omega [\mu] + [\beta] + \frac{1}{j\omega} [\gamma] \right\} \cdot |\dot{q}_0| = [\alpha] |F|$$

Soit $|V|$ la matrice colonne des vitesses réellement mesurables aux différents points de la structure excitée à la pulsation ω . Cette matrice est liée à celle des coordonnées généralisées par la relation :

$$|V| = [\alpha] |\dot{q}_0| \quad \text{ou} \quad |\dot{q}_0| = [\alpha]^{-1} |V|$$

En portant cette valeur dans l'équation (3) nous obtenons le système :

$$(4) \quad \left\{ j\omega [\mu] + [\beta] + \frac{1}{j\omega} [\gamma] \right\} [\alpha]^{-1} |V| = [\alpha] |F|$$

Poseons :

$$A = \begin{Bmatrix} j(\omega\mu_1 - \frac{\gamma_1}{\omega}) + \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & j(\omega\mu_2 - \frac{\gamma_2}{\omega}) + \beta_{22} & & \\ \beta_{31} & \dots & \dots & \\ \vdots & & & \\ \beta_{n1} & \dots & \dots & j(\omega\mu_n - \frac{\gamma_n}{\omega}) + \beta_{nn} \end{Bmatrix}$$

De l'équation (4) nous déduisons alors :

$$(5) \quad |V| = [\alpha] [A^{-1}] [\overline{\alpha}] |F|$$

En prenant comme référence de phase celle de l'excitation, la réponse en vitesse d'un point k de la structure sollicitée par la configuration $|F|$ des forces d'excitation à la pulsation ω est de la forme :

$$V_k = U_k + j W_k$$

L'équation (5) s'écrit alors :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} U_1 + j W_1 \\ \dots \\ U_k + j W_k \\ \dots \\ U_n + j W_n \end{vmatrix} = [\alpha] [A^{-1}] [\overline{\alpha}] \begin{vmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_k \\ \dots \\ F_n \end{vmatrix}$$

Précisons en outre la signification de $[\alpha]$:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{31} & & & & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \dots & \alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Le premier indice affecté aux valeurs α caractérise un endroit de la structure, alors que le second indice indique la forme propre considérée. Ainsi, chaque colonne de la matrice $[\alpha]$ décrit la déformée relative à un mode propre non amorti.

Considérons la relation (6) : $[\alpha]$ et $[\bar{\alpha}]$ sont des matrices carrées réelles d'ordre n , tandis que $[A^{-1}]$ est une matrice carrée complexe d'ordre n . Il en résulte que l'expression :

$$[\alpha][A^{-1}][\bar{\alpha}]$$

est une matrice carrée complexe d'ordre n dont la valeur est fonction des caractéristiques de la structure et de la pulsation ω des forces d'excitation et de ces grandeurs seulement.

D'après (6) la vitesse V_k au point k de la structure est de la forme :

$$V_k = U_k + j W_k = (b_1 + j a_1) F_1 + (b_2 + j a_2) F_2 + \dots + (b_j + j a_j) F_j + \dots + (b_n + j a_n) F_n$$

$$\text{où } (b_1 + j a_1), (b_2 + j a_2), \dots, (b_j + j a_j), \dots, (b_n + j a_n)$$

représentent les éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $[\alpha][A^{-1}][\bar{\alpha}]$ donc :

$$(2) \quad W_k = \alpha_{k1} F_1 + \alpha_{k2} F_2 + \alpha_{k3} F_3 + \dots + \alpha_{kj} F_j + \dots + \alpha_{kn} F_n$$

Pour une pulsation ω fixée de l'excitation et un point k considéré, les valeurs $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3}, \dots, \alpha_{kj}, \dots, \alpha_{kn}$ sont des constantes. W_k est donc une combinaison linéaire de $F_1, F_2, \dots, F_j, \dots, F_n$.

En considérant F_j comme variable et en fixant toutes les autres forces à des valeurs quelconques, l'expression (8) peut se mettre sous la forme :

$$(9) \quad \boxed{W_k = \alpha_{kj} F_j + c^k}$$

Rapportée à des axes orthogonaux $\vec{OF_j}$ et $\vec{OW_k}$, la relation (9) est celle d'une droite. La fonction $|W_k| = |h_k(F_j)|$ est alors constituée de deux demi-droites ayant, en valeur absolue, la même pente et rencontrant l'axe $\vec{OF_j}$ en un point d'abscisse F_{j_0} .

Les fonctions $W_1 = h_1(F_j), W_2 = h_2(F_j), \dots, W_n = h_n(F_j)$ représentent également des droites, mais leurs coefficients sont différents de ceux de $W_k = h_k(F_j)$.

La grandeur R étant définie par $R = \sum_{k=1}^n |W_k|$, pour que la fonction $R = g(F_j)$ présente une zone où elle est minimale; il faudrait que les droites $W_1 = h_1(F_j), W_2 = h_2(F_j), \dots, W_n = h_n(F_j)$ aient tendance à couper l'axe $\vec{OF_j}$ au voisinage de la valeur particulière F_{j_0} .

Nous allons montrer que cette tendance se réalise effectivement. Supposons qu'en excitant le mode i par n forces réelles, seuls ce mode et un mode p considéré comme parasite contribuent à la réponse de la structure (en général $p = i+1$ ou $p = i-1$). Dans ces conditions, pour analyser le problème, il suffit de ne conserver de l'équation (3) que la relation :

$$(10) \quad \begin{bmatrix} j(\omega\mu_i - \frac{\gamma_i}{\omega}) + \beta_{ii} & \beta_{ip} \\ \beta_{pi} & j(\omega\mu_p - \frac{\gamma_p}{\omega}) + \beta_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_i \\ \dot{\Phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_p \end{bmatrix}$$

où

$$\Phi_i = \alpha_{i1} F_1 + \alpha_{i2} F_2 + \dots + \alpha_{ji} F_j + \dots + \alpha_{in} F_n$$

et

$$\Phi_p = \alpha_{p1} F_1 + \alpha_{p2} F_2 + \dots + \alpha_{jp} F_j + \dots + \alpha_{pn} F_n$$

En posant : $\dot{\Phi}_i = u_i + j\omega v_i$ et $\dot{\Phi}_p = u_p + j\omega v_p$ et en excitant à la pulsation $\omega = \omega_i = \sqrt{\frac{\gamma_i}{\mu_i}}$, la référence de phase étant celle des forces réelles $F_1, F_2, \dots, F_n$, la relation (10) s'écrit :

$$(11) \begin{cases} (a) \beta_{ii}(u_i + j\omega_i W_i) + \beta_{ip}(u_p + j\omega_p W_p) = \bar{\Phi}_i \\ (b) j(\omega_i \mu_p - \frac{\gamma_p}{\omega_i})(u_p + j\omega_p W_p) + \beta_{pp}(u_p + j\omega_p W_p) + \beta_{pi}(u_i + j\omega_i W_i) = \bar{\Phi}_p \end{cases}$$

En remarquant que $\bar{\Phi}_i$ et $\bar{\Phi}_p$ sont réelles, (11) s'écrit :

$$(12) \begin{cases} (a) \beta_{ii} \cdot u_i + \beta_{ip} \cdot u_p = \bar{\Phi}_i \\ (b) \beta_{ii} \cdot W_i + \beta_{ip} \cdot W_p = 0 \\ (c) -(\omega_i \mu_p - \frac{\gamma_p}{\omega_i}) \cdot W_p + \beta_{pp} \cdot u_p + \beta_{pi} \cdot u_i = \bar{\Phi}_p \\ (d) (\omega_i \mu_p - \frac{\gamma_p}{\omega_i}) \cdot u_p + \beta_{pp} \cdot W_p + \beta_{pi} \cdot W_i = 0 \end{cases}$$

Pour isoler le mode i à sa pulsation propre ω_i , il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} W_p = 0 \\ W_i = 0 \\ u_p = 0 \\ u_i \neq 0 \end{cases}$$

Or, les relations (12) montrent que $W_p = 0$ entraîne $W_i = 0, u_p = 0$ et $u_i = \frac{\bar{\Phi}_i}{\beta_{ii}}$

Le calcul de W_p d'après les relations (12) nous donne :

$$(13) \quad W_p = \frac{(\omega_i \mu_p - \frac{\gamma_p}{\omega_i})}{(\omega_i \mu_p - \frac{\gamma_p}{\omega_i})^2 + (\beta_{pp} - \frac{\beta_{ip} \beta_{pi}}{\beta_{ii}})^2} \left[\bar{\Phi}_i \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \bar{\Phi}_p \right]$$

En posant :

$$B = \frac{\left(\omega_i \mu_p - \frac{\gamma_p}{\omega_i} \right)}{\left(\omega_i \mu_p - \frac{\gamma_p}{\omega_i} \right)^2 + \left(\beta_{pp} - \frac{\beta_{ip} \beta_{pi}}{\beta_{ii}} \right)^2}$$

et $C = B \cdot \frac{\beta_{ip}}{\beta_{ii}}$ (B et C pour $\omega = \omega_i$ étant des constantes)

Nous obtenons :

$$(14) \quad \boxed{\omega_p = B \cdot \left[\dot{\Phi}_i \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \dot{\Phi}_p \right]}$$

et d'après (12b) :

$$(15) \quad \boxed{\omega_i = C \cdot \left[\dot{\Phi}_i \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \dot{\Phi}_p \right]}$$

Comme d'autre part les composantes imaginaires de la vitesse mesurable aux différents points de la structure sont reliées aux composantes imaginaires des coordonnées généralisées par les relations :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \alpha_{1i} \omega_i + \alpha_{1p} \omega_p \\ \omega_2 = \alpha_{2i} \omega_i + \alpha_{2p} \omega_p \\ \dots \dots \dots \\ \omega_h = \alpha_{hi} \omega_i + \alpha_{hp} \omega_p \\ \dots \dots \dots \\ \omega_n = \alpha_{ni} \omega_i + \alpha_{np} \omega_p \end{array} \right.$$

Nous pouvons expliciter $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots, W_n$. En effet, d'après (14), (15) et (16)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1 = [C \alpha_{1i} + B \alpha_{1p}] \left[\Phi_i \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \Phi_p \right] \\ W_2 = [C \alpha_{2i} + B \alpha_{2p}] \left[\Phi_i \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \Phi_p \right] \\ \dots \dots \dots \\ W_n = [C \alpha_{ni} + B \alpha_{np}] \left[\Phi_i \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \Phi_p \right] \\ \dots \dots \dots \\ W_n = [C \alpha_{ni} + B \alpha_{np}] \left[\Phi_i \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \Phi_p \right] \end{array} \right.$$

avec :

$$(18) \quad \Phi_i \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \Phi_p = (\alpha_{1i} \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \alpha_{1p}) F_1 + \dots + (\alpha_{ji} \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \alpha_{jp}) F_j + \dots$$

$$\dots \dots \dots + (\alpha_{ni} \frac{\beta_{pi}}{\beta_{ii}} - \alpha_{np}) F_n$$

En conclusion, l'examen des relations (17) et (18) montre qu'en faisant varier F_j , les fonctions $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots, W_n$ s'annulent simultanément pour la même valeur F_j de F_j . Il en résulte que, dans ces conditions, les droites $W_1 = h_1(F_j), \dots, W_n = h_n(F_j), \dots, W_n = h_n(F_j)$, distinctes les unes des autres, possèdent la particularité commune de couper l'axe σF_j pour la même valeur F_j de F_j . (Fig. 3)

3.2.3.3. - Remarques importantes.

Le but de la démonstration précédente était de montrer une tendance, car dans la réalité la pulsation propre ω_i n'est pas connue rigoureusement et, pour une configuration initiale quelconque de l'excitation, des modes autres que le mode recherché et un mode parasite principal se manifestent dans la réponse de la structure. D'autre part, une structure mécanique n'est jamais rigoureusement linéaire.

Ces facteurs ont pour conséquence, qu'en pratique, d'une part, les fonctions $W_1=h_1(F_j), W_2=h_2(F_j) \dots W_n=h_n(F_j)$ ne sont des droites qu'en première approximation (non-linéarité de la structure) et que d'autre part elles ne coupent pas toutes l'axe $\overrightarrow{OF_j}$ au même point d'abscisse F_{j0} , mais leurs points d'intersections sont groupés dans une zone de part et d'autre de F_{j0} , qui s'étale de l'abscisse f_j à l'abscisse f'_j . (Fig. 4)

Pour $f_j \leq F_j \leq f'_j$, la fonction $R = \sum_{h=1}^n |W_h| = g(F_j)$ est théoriquement une ligne brisée, somme de n lignes brisées élémentaires. Pour $F_j \geq f'_j$ et $F_j \leq f_j$, la fonction $R = g(F_j)$ est constituée de deux demi-droites ayant même pente en valeur absolue.

Expérimentalement, comme nous le verrons plus loin, pour n assez grand et bénéficiant du caractère statistique de la mesure de W_h , avec $h=1,2, \dots, n$, la fonction $R = g(F_j)$ pour $f_j \leq F_j \leq f'_j$ peut être assimilée à une fonction à dérivée continue présentant un minimum.

3.2.4. - Etude expérimentale de la fonction $R = g(F_j)$ et première application de la méthode d'appropriation.

3.2.4.1. - Description du montage expérimental.

Les résultats expérimentaux contenus dans ce travail ont été obtenus sur la "maquette d'étude" de l'O. N. S. R. A. Cette maquette est constituée par l'empenage d'un avion réel. (Voir Fig. 5)

Cette structure mécanique, fixée sur un bâti suspendu élastiquement, est excitée en différents endroits par des forces harmoniques réglables en signe et en niveau. Ces forces sont appliquées à la structure au moyen d'excitateurs électrodynamiques. Chaque exciteur est alimenté en courant par un amplificateur de puissance précédé d'un préamplificateur à gain variable. Un générateur harmonique de référence à fréquence variable, de grande stabilité et définition, pilote les forces d'excitation. (Fig. 6)

Des capteurs de vitesse placés en divers points de la structure sont reliés par commutation manuelle, à un dispositif analogique d'analyse qui permet d'élaborer la composante en phase et la composante en quadrature de la vitesse aux points considérés, la référence de la phase étant celle du générateur harmonique qui pilote l'excitation.

Un ensemble de visualisation permet d'apprécier qualitativement le déphasage de la vitesse en différents points grâce à des ellipses de Lissajous.

3.2.4.2. - Relevés expérimentaux de $R=g(F_j)$ et évolution de l'appropriation.

Dans cette première manipulation, la fréquence d'excitation, prise sensiblement égale à la fréquence propre du mode considéré à la suite d'un essai préliminaire, a été maintenue constante tout au long de l'expérience. Le mode considéré était un mode de flexion symétrique avec participation des gouvernes, de fréquence propre $23,6 \text{ Hz}$. Les emplacements des excitateurs et des capteurs sont indiqués sur la Fig. 7.

Le processus opératoire fut le suivant : les forces F_1, F_2 et F_3 ont été réglées initialement à une valeur quelconque. Nous avons ensuite donné à F_1 différentes valeurs en gardant F_2 et F_3 à leurs valeurs initiales. Le relevé de la partie imaginaire de la vitesse en divers points pour les différentes valeurs de F_1 a permis de tracer les courbes $|A_i \sin \varphi_i| = g(F_1)$, Pour $i=1,2,3 \dots 10$ et

$R = \sum |A_i \sin \varphi_i| = g(F_1)$. Fig. 8 Avant de donner à F_2 différentes valeurs nous avons fixé F_1 à la valeur F_{10} correspondant à l'abscisse du minimum de $R = g(F_1)$, F_3 gardant la valeur initiale. Les variations de F_2 , puis de F_3 ont permis de relever les courbes des Fig. 9 et 10. En fin d'expérience $F_1 = F_{10}$, $F_2 = F_{20}$, $F_3 = F_{30}$. Soit R_{10}, R_{20}, R_{30} les minimums des fonctions $R = g(F_j)$. Les valeurs R_{10}, R_{20}, R_{30} et R_{30} ont été représentées sur le graphique Fig. 11 (en bas à droite) en fonction de l'avancement du processus de réglage des forces d'excitation. La Fig. 11 groupe les résultats de cette expérience.

Remarquons que les courbes $R = g(F_j)$ se rapprochent d'autant plus de la courbe théorique en forme de V que l'appropriation de l'excitation est plus avancée. Notons d'autre part le caractère décroissant du graphique représentant l'évolution du résidu au cours de l'expérience. Nous reviendrons sur cette constatation importante dans le paragraphe relatif à la convergence du processus.

3.2.4.3. - Détermination pratique du minimum de la courbe $R=g(F_j)$.

Dans un stade opérationnel de la méthode, il est important de connaître l'abscisse du minimum dans un temps relativement court et d'une façon précise. Or, comme nous le verrons dans la suite, si la grandeur $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|$ peut être élaborée très rapidement par des moyens électroniques, l'établissement d'un nouveau régime permanent après une variation incrémentale d'une des forces d'excitation nécessite un temps plus long. Il est donc important de trouver l'abscisse du minimum en limitant le nombre des valeurs discrètes données aux forces d'excitation. Une méthode par approximations successives conduirait ainsi à un temps de réglage trop important.

La variation remarquable de la fonction $R=g(F_j)$, comportant un minimum situé entre deux zones A et B, où la fonction est sensiblement linéaire, permet de faire l'hypothèse simplificatrice suivante : l'abscisse du minimum de la courbe est sensiblement confondue avec l'intersection des droites D et D' qui se confondent avec les deux zones linéaires. Fig. 12. Il suffit donc de connaître, en principe, 4 points M_1, M_2, M'_1, M'_2 de la courbe $R=g(F_j)$ situés respectivement deux à deux dans les deux zones linéaires pour déterminer géométriquement ou par le calcul la valeur F_{j_0} . Mais, dans la pratique, en début d'expérience, on ignore la localisation des deux zones linéaires et il est nécessaire de connaître un nombre supérieur de points de la courbe pour éviter des erreurs.

Ces difficultés nous ont amené à donner une forme nouvelle au processus de réglage des différentes forces sans modifier les bases de la méthode d'appropriation.

3.3. - Proposition d'un nouveau processus de réglage des forces d'excitation.

3.3.1. - Remarque préliminaire.

Montrons, que théoriquement, l'intersection I des droites D et D' qui supportent les branches linéaires de la fonction $R=g(F_j)$ dans les zones A et B se trouve sur l'axe OF_j . Pour simplifier les notations posons $OF_j = x$. Soient $A_1 \sin \varphi_1 = y_1(x)$, $A_2 \sin \varphi_2 = y_2(x) \dots A_i \sin \varphi_i = y_i(x) \dots A_n \sin \varphi_n = y_n(x)$ les évolutions des parties imaginaires de la vitesse aux points 1, 2, ..., i, ..., n en fonction de x.

Nous savons que $y_1(x), y_2(x), \dots, y_i(x), \dots, y_n(x)$ représentent des droites qui coupent l'axe OF_j aux points $I_1, I_2, \dots, I_i, \dots, I_n$ et que ces points se situent tous à l'intérieur d'une zone C. (Conf. § 3.2.3.2.)

Ces droites sont de la forme $y_i = \pm a_i x \mp b_i$ avec a_i et $b_i > 0$. Désignons par a' et b' la valeur absolue des coefficients des droites à pente négative et par a et b la valeur absolue des coefficients des droites à pente positive.

Les équations des droites dans le cas de la Fig. 13 seront de la forme :

$$\begin{array}{ll} y_1 = -a'_1 x + b'_1 & (\text{droite } d_1) \\ y_2 = -a'_2 x + b'_2 & (\text{droite } d_2) \\ y_3 = +a_3 x + b_3 & (\text{droite } d_3) \\ \vdots & \vdots \\ y_i = -a'_i x + b'_i & (\text{droite } d_i) \\ \vdots & \vdots \\ y_n = +a_n x + b_n & (\text{droite } d_n) \end{array}$$

Dans la zone A l'équation de D sera :

$$Y = \sum_{i=1}^n |y_i| = y_1 + y_2 + |y_3| + \dots + y_i + \dots + |y_n|$$

$$Y = (-a'_1 x + b'_1) + (-a'_2 x + b'_2) + (-a_3 x + b_3) + \dots + (-a'_i x + b'_i) + \dots + (-a_n x + b_n)$$

$$Y = -(a'_1 + a'_2 + a_3 + \dots + a'_i + \dots + a_n)x + (b'_1 + b'_2 + b_3 + \dots + b'_i + \dots + b_n)$$

La droite D coupe l'axe $\overrightarrow{OF_j}$ au point I d'abscisse :

(19)

$$x_I = \frac{b'_1 + b'_2 + b_3 + \dots + b'_i + \dots + b_n}{a'_1 + a'_2 + a_3 + \dots + a'_i + \dots + a_n}$$

Remarquons que dans l'expression de x_I les coefficients des droites à pente positive et négative ne font pas l'objet d'une discrimination. Le résultat obtenu est donc général et ne dépend pas du signe arbitraire des pentes choisies dans le cas de la Fig. 13.

De même, dans la zone B l'équation de D' sera :

$$Y' = \sum_{i=1}^n |y_i| = |y_1| + |y_2| + y_3 + \dots + |y_i| + \dots + y_n$$

$$Y' = (+a_1 x - b_1) + (+a_2 x - b_2) + (+a_3 x - b_3) + \dots \\ + (+a_i x - b_i) + \dots + (+a_n x - b_n)$$

$$Y' = +(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i + \dots + a_n)x - (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_i + \dots + b_n)$$

La droite D' coupe l'axe $\overrightarrow{OF_j}$ au point I' d'abscisse.

$$(20) \quad x_{I'} = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_i + \dots + b_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i + \dots + a_n}$$

La comparaison de (19) et (20) nous donne :

$$x_I = x_{I'}$$

Conclusion : Non seulement des droites D et D' qui supportent les deux branches linéaires de $R = g(F_j)$ ont même pente, mais leur intersection I se trouve sur l'axe $\overrightarrow{OF_j}$. Or, l'abscisse du point I correspond à celle du minimum de la courbe $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i| = g(F_j)$

3.3.2. - Détermination systématique de l'abscisse du point I.

3.3.2.1. - Principe des opérations.

La remarque précédente entraîne qu'un progrès dans la détermination du minimum de $R=g(F_j)$ consisterait à déterminer l'intersection I de la droite D ou D' avec l'axe $\overrightarrow{OF_j}$. Il suffirait pour cela de connaître deux valeurs distinctes de R, toutes deux localisées dans la zone A ou toutes deux localisées dans la zone B. Dans ces conditions ces deux points détermineraient complètement la droite D ou D', donc le point I. Mais en réalité, on ignore la localisation exacte et l'importance des zones A, B et C. Ainsi, à deux valeurs x_0 et x_1 distinctes, mais quelconques, de x correspondent deux valeurs R_0 et R_1 du résidu. Les points $M_0(x_0, R_0)$ et $M_1(x_1, R_1)$ n'appartiennent, en général, pas tous les deux à D ou D', car D et D' ne se confondent avec $R=g(F_j)$ que dans la zone A et la zone B. Soit D₁ la droite passant par les points M_0 et M_1 et coupant l'axe $\overrightarrow{OF_j}$ en I₁. Les Fig. 14 et 15 montrent qu'en général pour x_0 et x_1 pris au hasard, I et I₁ sont distincts.

La difficulté du choix de x_0 et x_1 pourrait être levée en donnant à la droite D ou D' une "réalité physique" sur l'ensemble des plages A, B et C. Pour cela, remarquons (Fig. 13) que dans la zone A la droite D est obtenue par somme géométrique des droites à pentes négatives ($d_1, d_2, \dots, d_i$) et des symétriques par rapport à $\overrightarrow{OF_j}$ des droites à pentes positives ($d_3, \dots, d_n$)

Généralisons cette construction aux zones B et C, Fig. 16. Faisons la somme géométrique des ordonnées des droites $d_1, d_2, \dots, d_i$, et des droites symétriques de $d_3, \dots, d_n$ par rapport à $\overrightarrow{OF_j}$ pour toutes les valeurs de x. La droite résultante D" a pour équation :

$$Y'' = -(a'_1 + a'_2 + a_3 + \dots + a'_i + \dots + a_n)x + (b'_1 + b'_2 + b_3 + \dots + b'_i + \dots + b_n)$$

Les droites D et D" sont donc identiques et coupent en particulier l'axe $\overrightarrow{OF_j}$ au même point I.

L'avantage considérable de l'introduction de la droite D" est que celle-ci peut être déterminée sans ambiguïté à partir de deux valeurs quelconques x_0 et x_1 de x. La connaissance de D" entraîne celle du point I, abscisse du minimum de la fonction $R = g(F_j)$. La droite D" fait disparaître la notion de zone.

3.3.2.2. - Mode opératoire.

L'application du principe précédent conduit aux opérations suivantes :

- pour la valeur x_0 de F_j déterminons les valeurs $y_1^0, y_2^0, y_3^0, \dots, y_n^0$ composantes imaginaires de la vitesse aux points 1, 2, 3, ..., n

- pour la valeur x_1 de F_j déterminons les valeurs $y_1^1, y_2^1, y_3^1, \dots, y_n^1$ composantes imaginaires de la vitesse aux mêmes points: 1, 2, 3, ..., n,

La connaissance des couples de valeurs

(y_1^0, y_1^1) pour la droite d_1 ,

(y_2^0, y_2^1) pour la droite d_2 ,

(y_3^0, y_3^1) pour la droite d_3 ,

 (y_i^0, y_i^1) pour la droite d_i ,

 (y_n^0, y_n^1) pour la droite d_n ,

permet de connaître complètement l'équation de ces droites et en particulier le signe de leur pente.

Pour obtenir la droite D'' il suffit alors de faire la somme géométrique des droites à pentes négatives et des symétriques par rapport à OF_j des droites à pentes positives. Ces considérations conduisent au tableau suivant :

	mesures brutes		calcul de k_i	signe de k_i	mesures modifiées	
	x_0	x_1			x_0	x_1
d_1	y_1^0	y_1^1	$y_1^1 - y_1^0 = k_1$	-	$+y_1^0$	$+y_1^1$
d_2	y_2^0	y_2^1	$y_2^1 - y_2^0 = k_2$	-	$+y_2^0$	$+y_2^1$
d_3	y_3^0	y_3^1	$y_3^1 - y_3^0 = k_3$	+	$-y_3^0$	$-y_3^1$
d_i	y_i^0	y_i^1	$y_i^1 - y_i^0 = k_i$	-	$+y_i^0$	$+y_i^1$
d_n	y_n^0	y_n^1	$y_n^1 - y_n^0 = k_n$	+	$-y_n^0$	$-y_n^1$

Remarquons que le signe de k_i est le même que celui de la pente de la droite d_i .

Les mesures modifiées permettent de déterminer directement les coordonnées des points $M_0(x_0, y_0'')$ et $M_1(x_1, y_1'')$ de D'' . En effet,

$$y_0'' = +y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_i + \dots - y_n$$

$$y_1'' = +y_1' + y_2' - y_3' + \dots + y_i' + \dots - y_n'$$

L'abscisse du point d'intersection de D'' avec $\overrightarrow{OF_j}$ est donnée directement par la relation :

$$(21) \quad x_I = \frac{y_1'' \cdot x_0 - y_0'' \cdot x_1}{y_1'' - y_0''}$$

Or, nous avons vu que l'abscisse du point I était également celle du minimum de $R = g(F_j)$. La valeur optimale à donner à F_j avant de passer au réglage de F_{j+1} est donc :

$$F_{j \text{ opti}} = x_I$$

La détermination de la valeur optimale de F_j est donc devenue une opération très rapide (deux valeurs distinctes de F_j sont suffisantes) et systématique (x_0 et x_1 peuvent être quelconques).

Le processus défini précédemment permet de connaître non seulement la valeur absolue de $F_{j \text{ opti}}$, mais encore son signe. En effet, si $x_I < 0$, il suffit d'inverser le signe de la force excitatrice.

Nous verrons dans la suite que les opérations précédentes peuvent être exécutées automatiquement sur les lieux de l'essai par une chaîne numérique comportant un calculateur numérique du type industriel travaillant en temps réel.

3.4. - Influence des écarts entre une structure physique et son moule mathématique sur l'application pratique de la méthode d'appropriation.

3.4.1. - Introduction.

L'appropriation des forces d'excitation à un mode de vibration considéré étant une opération préliminaire à but essentiellement pratique, une méthode d'appropriation ne doit pas être mise en défaut par les écarts inévitables de la structure réelle et de son moule mathématique. Il convient donc d'analyser l'influence de ces écarts sur la mise en oeuvre de la méthode précédente et d'y apporter les modifications et améliorations nécessaires, afin de la rendre opérationnelle sur une structure réelle.

3.4.2. - Détermination pratique de F_j optimale par interpolation.

Sur une structure réelle, lorsque l'on fait varier F_j sur une plage importante et que l'on relève point par point la courbe $(\mathcal{C})$ correspondant à la droite théorique D'' (Fig. 17), $(\mathcal{C})$ n'est, en général, pas rigoureusement linéaire. Ainsi en donnant à F_j deux valeurs x_0 et x_1 , le processus précédent définit deux points M_0 et M_1 . L'intersection de la droite D'' passant par M_0 et M_1 avec l'axe $\overrightarrow{OF_j}$ détermine une valeur de x_I qui est en général différente de la valeur recherchée x_I tout en étant très voisine de cette dernière. La valeur x_I localise toutefois une zone où la courbe expérimentale $(\mathcal{C})$ peut être considérée comme étant linéaire. Il suffit alors de recommencer l'opération précédente pour les valeurs x_I et $x_{I''} = x_I + \Delta x$ qui définissent deux points M' et M'' appartenant à $(\mathcal{C})$ et à une droite D''_1 dont l'intersection avec $\overrightarrow{OF_j}$ détermine la valeur :

$$x_I = F_j \text{ optimale}$$

3.4.3. - Effet local d'une force d'excitation sur l'isolement des modes parasites.

Les résultats expérimentaux présentés dans la suite ont été obtenus pour un emplacement des capteurs et des excitateurs tel qu'indiqué sur la Fig. 25.

Les résultats expérimentaux de la Fig. 18 sont relatifs au mode de fréquence propre $23,5 \text{ Hz}$ dont les lignes de noeuds sont portées en pointillés sur la Fig. 25.

Les courbes expérimentales C_i , $i=1,2,\dots,11,12$, de la Fig. 18 représentent l'évolution de la composante imaginaire de la vitesse complexe en différents points de la structure en fonction des variations

de la force F_1 , les forces F_2 , F_3 et F_4 étant gardées constantes. Nous remarquons que la variation des composantes imaginaires relatives aux capteurs situés dans la zone en bout d'aileron délimitée par la ligne de noeuds (courbes C_i en traits pleins) sont plus importants que celles relatives à la zone située au-delà de la ligne de noeuds, (courbes C_i en traits tiretés) alors que les amplitudes de vibrations de deux points symétriques par rapport à la ligne de noeuds sont sensiblement de la même valeur. En faisant varier F_3 , au contraire, cette tendance s'inverse. Tout se passe donc comme si une force d'excitation avait une action plus prononcée sur les modes parasites dans la zone délimitée par les lignes de noeuds où elle est appliquée.

Cette constatation expérimentale nous incite à mettre d'autant plus d'excitateurs que le nombre de zones est plus élevé, c'est-à-dire, en général, que le rang du mode propre est plus élevé. D'autre part, nous constatons sur la Fig. 18 que les courbes C_i relatives, pour les variations de F_1 , à la zone située entre le centre du fuselage et la ligne des noeuds, coupent l'axe $O\vec{F}_1$ hors de la zone du minimum de la courbe expérimentale $R = \sum_{i=1}^n |A_i^j \sin \varphi_i| = g_1(F_1)$ ce qui explique l'écart entre la droite D'' déterminée à partir de deux valeurs x_0 et x_1 de F_1 et l'une des branches linéaires de la courbe $R = \sum_{i=1}^n |A_i^j \sin \varphi_i| = g_1(F_1)$. Cette remarque suggère une variante dans l'application de la méthode.

3.4.4. - Effets des non-linéarités sur la fréquence propre d'un mode de vibration. Détermination de la fréquence propre optimale.

Par suite des non-linéarités de la structure la fréquence propre d'un mode dépend de son amplitude et donc du niveau de l'excitation. Fig. 19. Mais, même à niveau de réponse constant, la détermination de la fréquence propre correspondante est une opération délicate. Un moyen simple pour obtenir une valeur approchée de cette fréquence propre consiste à placer un capteur de vitesse en un endroit significatif pour le mode considéré et à faire varier la fréquence des forces d'excitation jusqu'à ce que la vitesse en ce point soit en phase avec la référence de l'excitation. Cette détermination est commode, mais arbitraire, car la résonance de phase ne se fait simultanément en tous les points de la structure que si l'excitation est parfaitement appropriée au mode considéré. La fréquence propre déterminée par ce moyen constitue cependant une première approximation de la fréquence propre optimale.

Après réglage d'une force d'excitation, le niveau global d'excitation a subi une modification et par conséquent la fréquence propre du mode aura été légèrement modifiée. Ainsi, le problème de l'appropriation et la recherche de la fréquence propre optimale sont

intimement liés. Nous allons indiquer un moyen de déterminer cette fréquence par une méthode ne faisant appel à aucun matériel supplémentaire, le calcul nécessaire pouvant être effectué par le calculateur industriel utilisé pour la détermination des forces optimales d'excitation.

Considérons le capteur de vitesse ℓ et supposons que, dans sa réponse, seuls le mode i que l'on cherche à isoler et un mode $i+1$ considéré comme un mode parasite prépondérant interviennent. La vitesse complexe au point ℓ est alors de la forme :

$$(22) \quad V_{\ell} = \underbrace{U_{\ell} + jW_{\ell}}_{\text{réponse globale}} = \underbrace{U_{\ell}^{i+1} + jW_{\ell}^{i+1}}_{\text{réponse du mode } i+1} + \underbrace{U_{\ell}^i + jW_{\ell}^i}_{\text{réponse du mode } i}$$

Dans l'hypothèse d'une structure répondant à l'"Hypothèse de Basile" explicitons cette relation :

$$\begin{aligned} V_{\ell} = & \frac{\beta_{i+1} \cdot \alpha_{\ell, i+1}}{(\omega \mu_{i+1} - \frac{\gamma_{i+1}}{\omega})^2 + \beta_{i+1}^2} \underbrace{\left[\alpha_{1, i+1} \cdot F_1 + \alpha_{2, i+1} \cdot F_2 + \dots + \alpha_{n, i+1} \cdot F_n \right]}_A \\ & - j \frac{(\omega \mu_{i+1} - \frac{\gamma_{i+1}}{\omega}) \alpha_{\ell, i+1}}{(\omega \mu_{i+1} - \frac{\gamma_{i+1}}{\omega})^2 + \beta_{i+1}^2} \underbrace{\left[\alpha_{1, i+1} \cdot F_1 + \alpha_{2, i+1} \cdot F_2 + \dots + \alpha_{n, i+1} \cdot F_n \right]}_A \\ & + \frac{\beta_i \cdot \alpha_{\ell, i}}{(\omega \mu_i - \frac{\gamma_i}{\omega})^2 + \beta_i^2} \underbrace{\left[\alpha_{1, i} \cdot F_1 + \alpha_{2, i} \cdot F_2 + \dots + \alpha_{n, i} \cdot F_n \right]}_B \\ & - j \frac{(\omega \mu_i - \frac{\gamma_i}{\omega}) \alpha_{\ell, i}}{(\omega \mu_i - \frac{\gamma_i}{\omega})^2 + \beta_i^2} \underbrace{\left[\alpha_{1, i} \cdot F_1 + \alpha_{2, i} \cdot F_2 + \dots + \alpha_{n, i} \cdot F_n \right]}_B \end{aligned}$$

Supposons qu'en début d'expérience la fréquence propre du mode i soit ω_i^0 pour un niveau d'excitation donné. En excitant la structure à la fréquence ω_i^0 , le terme W_i^0 s'annule, car $\omega_i^0 \mu_i^0 - \frac{\gamma_i^0}{\omega_i^0}$

Cependant, pour annuler la composante imaginaire W_i^{i+1} du mode parasite $i+1$, il faut trouver des forces $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$ telles que l'expression :

$$A = \alpha_{1,i+1} \cdot F_1 + \alpha_{2,i+1} \cdot F_2 + \dots + \alpha_{n,i+1} \cdot F_n$$

s'annule. Dans ces conditions la composante U_i^{i+1} s'annule également. Mais la combinaison initiale des forces $F_1, F_2, \dots F_n$ est différente de la combinaison après réglage, le niveau global d'excitation a donc varié et la fréquence propre ω_i^0 également ; il apparaît ainsi à nouveau une composante imaginaire W_i^0 du mode à isoler. Il convient de réduire W_i^0 en ajustant la fréquence d'excitation à sa nouvelle valeur propre. La composante imaginaire du mode i est la plus sensible à ce nouveau réajustement de ω_i . Fig. 20.

On doit donc, pour respecter les hypothèses qui sont à la base de l'application de la méthode, procéder à un réajustement de ω_i après chaque réglage d'un excitateur à sa valeur optimale. La Fig. 20 montre que, lorsqu'on se rapproche de la fréquence propre ω_i du mode i , la composante réelle de la vitesse passe par un maximum alors que la composante imaginaire décroît en valeur absolue et tend vers 0. Cette remarque va nous permettre d'élaborer une grandeur pouvant servir à déterminer $\omega_{i, \text{opt}}$. En vue de tenir compte de l'ensemble des modes contribuant à la réponse de tous les points de la structure sans que les informations se détruisent mutuellement, nous allons considérer la grandeur :

$$(23) \quad Z = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|}{\sum_{i=1}^n |A_i \cos \varphi_i|}$$

où $A_i \sin \varphi_i$ est la composante imaginaire de la vitesse mesurable au point i et $A_i \cos \varphi_i$ la composante réelle. Il suffit alors de procéder à un balayage sur ω et de prendre pour ω_{opt} la valeur correspondant à l'abscisse du minimum de la courbe $Z = f(\omega)$. Fig. 21.

D'autre part la grandeur Z peut être utilisée pour chiffrer le degré d'appropriation de l'excitation d'un mode propre considéré. Z est sans dimension et permet de comparer aisément le degré d'isolation des divers modes propres.

Remarque 1 :

Il est plus judicieux de prendre la grandeur $Z = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|}{\sum_{i=1}^n |A_i \cos \varphi_i|}$ que la grandeur $Z_1 = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|}{\sum_{i=1}^n |A_i \cos \varphi_i|}$. En effet, dans la grandeur Z le déphasage est pondéré par l'amplitude de vibration au point i alors qu'il n'apparaît aucune pondération de cette nature dans Z_1 car

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{A_i \sin \varphi_i}{A_i \cos \varphi_i} \right| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} \right| = \sum_{i=1}^n |\tan \varphi_i|$$

Ainsi, il suffirait d'un point k où φ_k serait voisin de $\frac{\pi}{2}$ pour que, dans une construction systématique de Z_1 , cette grandeur devienne très grande devant $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |\tan \varphi_i|$ et perde une signification physique acceptable.

Remarque 2 :

La grandeur $Z = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|}{\sum_{i=1}^n |A_i \cos \varphi_i|}$ n'a été retenue que pour le réglage de ω . Pour le réglage de F_j il est préférable de faire l'analyse avec la fonction $R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i| = g(F_j)$. La fonction $Z = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|}{\sum_{i=1}^n |A_i \cos \varphi_i|} = h(F_j)$ ayant, lorsqu'on s'écarte de la résonance, une variation moins caractéristique que $R = g(F_j)$ n'aurait pas conduit à un procédé aussi systématique pour le réglage de F_j .

3.5. - Etude de la convergence de la méthode d'appropriation précédente :

3.5.1. - Rappel.

Rappelons que, lorsque l'on excite un mode de vibration à la fréquence propre du mode non amorti, il existe l'équivalence :

$$(R) \quad R = \sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i| \rightarrow 0 \iff |F|_{\substack{\text{excit.} \\ \text{réelle}}} \rightarrow |F|_{\substack{\text{excit.} \\ \text{optimale}}}$$

3.5.2. - Interprétation géométrique de la convergence.

On sait (voir relation (7)) que la partie imaginaire de la vitesse du k ème capteur en fonction des forces d'excitation est de la forme :

$$W_k = a_1^k \cdot F_1 + a_2^k \cdot F_2 + \dots + a_n^k \cdot F_n$$

Après avoir fixé les $n-1$ premières forces d'excitation à leurs valeurs optimales, W_k est de la forme :

$$W_k = a_n^k \cdot F_n + \overbrace{(a_1^k \cdot F_1 + a_2^k \cdot F_2 + \dots + a_{n-1}^k \cdot F_{n-1})}^{A_k}$$

En faisant varier F_n , W_k décrit une droite dont l'ordonnée à l'origine A_k dépend des valeurs de $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$. Il en est de même pour les autres capteurs. Si les valeurs $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sont telles que les différentes ordonnées à l'origine A_k pour $k=1, 2, \dots, n$ sont que les droites $W_k = f(F_n)$ coupent l'axe des abscisses à la même valeur F_{n0} , alors le processus est totalement convergent et le résidu final $R = g_n(F_n)$ est constitué de deux demi-droites se coupant pour $F_n = F_{n0}$ et $R = g_n(F_{n0}) = 0$. Fig. 22

3.5.3. - Démonstration de la non-divergence du processus d'appropriation étudié.

Il n'est pas immédiat de démontrer théoriquement que le processus est convergent, par contre, nous allons montrer que le processus ne peut en aucun cas être divergent.

Traçons la courbe du résidu pour la variation successive de deux forces d'excitation (Fig. 23 et 24). Supposons que l'on ait fixé la force F_j à sa valeur optimale $(F_j)_{opti.}$. Il lui correspond la valeur $(R_j)_{opti.}$ du résidu. Passons alors au réglage de la force suivante F_{j+1} . La valeur initiale $(F_{j+1})_{init.}$ donne lieu à un résidu $(R_{j+1})_{init.} = (R_j)_{opti.}$, car l'excitation n'a pas été modifiée. Or, la fonction $R_{j+1} = g(F_{j+1})$ présente un minimum $(R_{j+1})_{opti.}$ pour $F_{j+1} = (F_{j+1})_{opti.}$, donc :

$$\left. \begin{array}{l} (R_{j+1})_{opti.} \leq (R_{j+1})_{init.} \\ (R_{j+1})_{init.} = (R_j)_{opti.} \end{array} \right\} \Rightarrow (R_j)_{opti.} \geq (R_{j+1})_{opti.}$$

Dans la pratique, lorsque l'égalité $(R_j)_{opti.} = (R_{j+1})_{opti.}$ se réalisera, il faudra modifier le point d'application de la force F_{j+1} si $(F_{j+1})_{opti.} = 0$ et procéder à un nouveau réglage de F_{j+1} ou faire $(F_{j+1})_{opti.} = (F_{j+1})_{init.}$ si $(F_{j+1})_{opti.} \neq 0$. Dans tous les cas, la grandeur R ne peut que décroître au fur et à mesure du réglage successif des différentes forces. L'équivalence (π) montre que ce faisant, la configuration de l'excitation se rapproche de la configuration optimale isolant au mieux un mode de vibration donné. Le

cycle de réglage des forces pourra être repris si, à la fin d'un premier cycle, la grandeur $\bar{R}$ n'a pas atteint une valeur acceptable. La rapidité de la convergence est fonction de plusieurs paramètres parmi lesquels la valeur initiale des forces d'excitation, leur nombre, leurs points d'application, leur ordre de réglage, etc...

3.5.4. - Etude expérimentale de la convergence de la méthode d'appropriation.

3.5.4.1. - Introduction.

Le procédé d'appropriation a été expérimenté sur la maquette de l'O.N.E.R.A. pour deux modes à fréquences propres voisines. L'emplacement des capteurs et des excitateurs est indiqué sur la Fig. 25. La maquette étant, en tant que structure mécanique, sujette à des dérives dans le temps, il était nécessaire de ne pas trop étendre la durée des différentes opérations. A ce stade d'expérimentation, toutes les opérations étaient manuelles et leur durée était directement proportionnelle au nombre des capteurs pris en considération. Pour avoir, d'autre part, une densité de capteurs suffisante, nous avons placé ces derniers sur une moitié de la structure seulement.

Dans un stade ultérieur d'automatisation du procédé, les opérations précédentes pourront se faire quasi-simultanément et le nombre de capteurs et d'excitateurs pourra être augmenté.

3.5.4.2. - Appropriation de l'excitation au mode de fréquence propre 23,54 Hz.

En début d'expérience le mode choisi a été excité à la période $T = 42,517 \cdot 10^{-3}$ sec. A l'aide de forces F_1, F_2, F_3 et F_4 dont les valeurs correspondent à la configuration "0" de l'excitation (voir Fig. 26). Nous avons alors procédé au réglage de F_1 suivant le processus systématique décrit au paragraphe 3.3.2.2.

En donnant à F_1 les deux valeurs arbitraires $\alpha_0 = +10$ et $\alpha_1 = +90$, nous avons relevé successivement deux séries de valeurs correspondant aux composantes imaginaires de la vitesse aux emplacements des capteurs et constitué le tableau suivant :

	mesures brutes		calcul	signe de k_i	mesures modifiées	
	x_0	x_1	k_i	$\pm$	(a) x_0	(b) x_1
C_{12}	$y_{12}^0 = 29,7$	$y_{12}^1 = 40,6$	$y_{12}^1 - y_{12}^0$	+	-29,7	-40,6
C_{11}	$y_{11}^0 = 26,8$	$y_{11}^1 = 52,3$	$y_{11}^1 - y_{11}^0$	+	-26,8	-52,3
C_{10}	$y_{10}^0 = 11$	$y_{10}^1 = -23$	$y_{10}^1 - y_{10}^0$	-	+11	-23
C_9	$y_9^0 = 14,1$	$y_9^1 = 8,3$	$y_9^1 - y_9^0$	-	+14,1	+8,3
C_8	$y_8^0 = -2,9$	$y_8^1 = -23,2$	$y_8^1 - y_8^0$	-	-2,9	-23,2
C_7	$y_7^0 = -6,1$	$y_7^1 = -127$	$y_7^1 - y_7^0$	-	-6,1	-127
C_6	$y_6^0 = -19,5$	$y_6^1 = -124$	$y_6^1 - y_6^0$	-	-19,5	-124
C_5	$y_5^0 = -8,7$	$y_5^1 = -89,8$	$y_5^1 - y_5^0$	-	-8,7	-89,8
C_4	$y_4^0 = 27,8$	$y_4^1 = +58,7$	$y_4^1 - y_4^0$	+	-27,8	-58,7
C_3	$y_3^0 = -31,8$	$y_3^1 = -160$	$y_3^1 - y_3^0$	-	-31,8	-160
C_2	$y_2^0 = -39,1$	$y_2^1 = -188$	$y_2^1 - y_2^0$	-	-39,1	-188
C_1	$y_1^0 = -52,5$	$y_1^1 = -241$	$y_1^1 - y_1^0$	-	-52,5	-241

(a)

(b)

Il suffit alors de sommer les valeurs de la colonne (a) pour obtenir Y_0'' et celles de la colonne (b) pour obtenir Y_1'' .

Nous connaissons ainsi les couples de valeurs

$$\begin{cases} x_0 = +10 \\ Y_0'' = -248 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = +90 \\ Y_1'' = -1136 \end{cases}$$

Il suffit maintenant d'appliquer la relation (21)

$$x_1 = \frac{Y_1'' \cdot x_0 - Y_0'' \cdot x_1}{Y_1'' - Y_0''}$$

pour obtenir: $x_1 = -10$

Nous allons ainsi ajuster F_1 à la valeur :

$$F_1 = -10$$

Après cette opération, l'excitation de la structure correspond à la configuration "1" de la Fig. 26. Pour un certain nombre de valeurs distinctes mais voisines de la fréquence d'excitation initiale, nous devons ensuite calculer les grandeurs $Z = \frac{\sum_{i=1}^n |A_i \sin \varphi_i|}{\sum_{i=1}^n |A_i \cos \varphi_i|}$

et fixer la nouvelle fréquence d'excitation à la valeur correspondant au minimum de Z comme cela a été exposé au paragraphe 3.4.4.

Nous avons procédé successivement aux réglages de F_1, F_2, F_3 et F_4 . Le graphe de la Fig. 26 représente l'évolution de la grandeur Z en fonction des configurations successives de l'excitation avant et après chaque réajustement de la fréquence d'excitation. Durant cette manipulation, aucune interpolation du type décrit au paragraphe 3.4.2. n'a été nécessaire.

Une fois la configuration "4" de l'excitation atteinte, nous avons procédé à une nouvelle tentative de réglage de F_1 et sommes retombés sur la même valeur $F_1 = -10$.

A la configuration finale "4" correspondent la fréquence propre $f_0 = 23,54 \text{ Hz}$ et $Z_0 = 0,026$. Il est possible de définir un déphasage moyen par la relation :

$$\text{tg } \phi_{\text{moyen}} = Z_0 = 0,026$$

soit

$$\phi_{\text{moyen}} = 1^{\circ} 30'$$

D'autre part, le degré d'isolement du mode peut être représenté par un ensemble de vecteurs dit "Bouquet de phases". Les composantes de ces vecteurs dans le plan complexe sont $|A_i \cos \phi_i|$ et $A_i \sin \phi_i$ pour $i=1,2,\dots,12$ (voir Fig. 27)

3.5.4.3. - Appropriation de l'excitation au mode de fréquence propre 27,18 Hz.

Nous avons appliqué la même méthode d'appropriation à un mode voisin de fréquence propre 27,18 Hz (mode de torsion).

Pour réajuster la fréquence d'excitation après chacune des trois premières configurations de l'excitation, nous l'avons fait glisser de telle sorte que la phase de la vitesse en un point significatif de la structure soit nulle par rapport à la référence de l'excitation [12]. Pour les configurations suivantes nous avons utilisé le même procédé que précédemment. Au départ, nous avons fait $F_3 = F_4 = 0$ pour rester dans une zone sensiblement linéaire de la structure.

Les évolutions de Z au cours de l'appropriation ont été représentées sur le graphe de la Fig. 29. Remarquons qu'il a fallu procéder à un deuxième cycle de réglage de F_1 et de F_2 .

La configuration finale "5" de l'excitation correspond à $Z_0 = 0,036$ et $f_0 = 27,18 \text{ Hz}$. $Z_0 = 0,036$ correspond à :

$$\phi_{\text{moyen}} = 2^{\circ} 7'$$

Le "Bouquet de phases" associé a été représenté sur la Fig. 28.

4 - PROPOSITION D'UNE INSTALLATION DESTINEE A RENDRE LE PROCESSUS ETUDIE OPERATIONNEL.

4.1. - Introduction :

L'intérêt du processus d'appropriation étudié précédemment réside dans le caractère systématique des différentes opérations à effectuer. Un tel processus peut donc être totalement ou en partie automatisé. Les progrès récents dans la technologie du traitement de l'information permettent d'envisager une installation disposée dans une semi-remorque-laboratoire et permettant de procéder aux opérations d'appropriation sur les lieux mêmes de l'essai dans des temps très courts.

Nous n'insisteront dans la suite de ce rapport que sur les fonctions relatives à la phase de l'appropriation, les autres fonctions faisant l'objet d'une étude plus vaste.

4.2. - Bloc diagramme fonctionnel de l'installation projetée :

Le schéma de principe d'une telle installation (Fig. 30) permet de distinguer les parties suivantes :

- Les circuits d'excitation, constitués par un générateur harmonique alimentant les excitateurs par l'intermédiaire d'amplificateurs à gain réglable.

- Les circuits de collecte des informations, qui acheminent les résultats des mesures opérées sur la structure par les capteurs vers une unité centrale d'acquisition et de traitement.

- Une unité centrale, constituée par un ordinateur numérique du type "industriel" qui, à partir des résultats de mesures, effectue les différentes opérations numériques et élabore et transmet les ordres de commande vers les installations périphériques (affichage des différentes valeurs des forces, des différentes fréquences d'excitation, commutation des voies de mesure, etc...).

4.3. - Analyse de la réponse de la structure par échantillonnage :

4.3.1. - Introduction.

La réponse d'un système linéaire à une sollicitation $E = E_0 \cos \omega t$ est de la forme : $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$

où $a_1 = A_1 \sin \varphi_1$, $b_1 = A_1 \cos \varphi_1$

Nous nous proposons de déterminer les valeurs a_1 et b_1 , composantes

imaginaires et réelles du vecteur de Fresnel associé à la grandeur $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$. Fig. 31.

La mise en oeuvre du processus étudié nécessite l'analyse d'un grand nombre de capteurs dans un temps très court. L'analyse successive des différentes réponses à l'aide d'un seul analyseur analogique serait trop longue à cause du temps de réponse de cet analyseur aux basses fréquences. L'association d'un analyseur analogique à chaque capteur conduit à une dépense importante.

Nous avons ainsi mis au point une méthode d'analyse numérique exploitable par le calculateur industriel se trouvant dans la chaîne d'essai et qui permettra de réduire considérablement le temps d'analyse.

4.3.2. - Méthode classique.

Le moyen le plus simple pour déterminer a_1 et b_1 consiste à échantillonner $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ aux instants t_1 et t_2 pour lesquels les fonctions $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ passent successivement par la valeur 0. Fig. 32. Dans ce cas $y(t_1) = A_1 \sin \varphi_1 = a_1$ et $y(t_2) = -A_1 \cos \varphi_1 = -b_1$ c'est-à-dire :

$$(24) \quad a_1 = y(t_1)$$

$$(25) \quad b_1 = -y(t_2)$$

Il arrive souvent qu'après amplification la réponse d'un système physique à une excitation harmonique forcée de pulsation ω soit de la forme :

$$y(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t - \varphi_3)$$

On montre que, dans ce cas, l'application de la méthode précédente fournit les valeurs a_1 et b_1 attachées à l'harmonique fondamentale de $y(t)$ avec les incertitudes absolues :

$$(26) \quad \Delta a_1 = \Delta b_1 = |A_0| + |A_2| + |A_3|$$

D'autre part, dans l'hypothèse d'une réponse de la forme $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ mais où les instants d'échantillonnages effectifs se produiraient pour $t_1 \pm \Delta t$ et $t_2 \pm \Delta t$, les incertitudes absolues commises sur a_1 et b_1 sont égales à :

$$(27) \quad \Delta a_1 = |A_1 \cos \varphi_1| \cdot \omega \cdot \Delta t$$

$$(28) \quad \Delta b_1 = |A_1 \sin \varphi_1| \cdot \omega \cdot \Delta t$$

Les relations (26), (27) et (28) permettront dans la suite d'établir des comparaisons entre la méthode classique et la méthode que nous allons exposer.

4.3.3. - Méthode par échantillonnage synchrone multiple de la réponse.

4.3.3.1. - Approximation d'une fonction par un développement de Fourier limité [18]. Rappels.

Nous savons [18] qu'étant donnée une fonction $y = f(x)$ (Fig. 33) connue par $n + 1$ valeurs $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ pour $n + 1$ valeurs $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ de la variable divisant la période en n parties égales, il est possible d'approximer $y = f(x)$ par le développement de Fourier $S_p(x)$ limité aux p premiers termes :

$$(29) \quad S_p(x) = b'_0 + \sum_{k=1}^p b'_k \cos kx + \sum_{k=1}^p a'_k \sin kx$$

avec

$$(30) \quad b'_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i$$

$$(31) \quad b'_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \cos kx_i$$

$$(32) \quad a'_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \sin kx_i$$

Le problème n'a un sens que si le nombre de coefficients $2p+1$ à déterminer est inférieur ou égal à $n + 1$.

4.3.3.2. - Application à la détermination de a_1 et b_1 dans le cas particulier d'une fonction $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$.

Dans ce cas particulier, le développement en série de Fourier de $y(t)$ est :

$$y(t) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$$

où l'on connaît théoriquement les coefficients $\alpha_1 = A_1 \sin \varphi_1$ et $b_1 = A_1 \cos \varphi_1$

Si $y(t)$ nous était connue par $n + 1$ valeurs correspondant à $n + 1$ valeurs de t divisant la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ en n intervalles égaux, l'application des relations (31) et (32) nous donnerait deux valeurs α'_1 et b'_1 qui seraient en fait, légèrement différentes des valeurs exactes α_1 et b_1 car les relations (31) et (32) ne sont que des formules approchées d'autant meilleures que n est plus grand.

Nous allons montrer que, dans le cas particulier où $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$, il existe des relations explicites entre α_1 et α'_1 d'une part et b_1 et b'_1 d'autre part. Cela nous permettra de modifier les formules (31) et (32) pour les rendre rigoureuses quel que soit n .

Calculons b'_1 d'après la formule (31).

Soit $\cos \omega t_i$ et $A_1 \cos(\omega t_i - \varphi_1)$ les valeurs de $\cos \omega t$ et $A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ pour $t = t_i$, sachant que $t_i = i \cdot \frac{T}{n}$ (Fig. 34) avec $i = 1, 2, 3 \dots n-1, n$.
D'après la formule (31)

$$b'_1 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n A_1 \cos(\omega t_i - \varphi_1) \cdot \cos \omega t_i$$

Comme $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $t_i = i \cdot \frac{T}{n}$

$$b'_1 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{n} i - \varphi_1\right) \cdot \cos \frac{2\pi}{n} i$$

D'autre part :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n} i\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n} i - \varphi_1\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{4\pi}{n} i - \varphi_1\right) + \cos \varphi_1 \right]$$

D'où

$$b'_1 = A_1 \cos \varphi_1 + \frac{A_1}{n+1} \sum_{i=0}^n \cos\left(\frac{4\pi}{n} i - \varphi_1\right)$$

On sait de même que :

$$\sum_{i=0}^n \cos(a + ih) = \cos a + \cos(a+h) + \dots + \cos(a+nh) = \frac{\cos[a + \frac{n+1}{2}h] \cdot \sin[\frac{n+1}{2}h]}{\sin \frac{h}{2}}$$

En faisant dans cette formule $a = -\varphi_1$ et $h = \frac{4\pi}{n}$ il vient :

$$\sum_{i=0}^n \cos\left(\frac{4\pi}{n} i - \varphi_1\right) = \cos \varphi_1$$

d'où :
$$b'_1 = A_1 \cos \varphi_1 + \frac{A_1 \cos \varphi_1}{n+1}$$

soit :
$$b'_1 = b_1 \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

ou (33)
$$b_1 = b'_1 \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

(Remarque : Lorsque $n \rightarrow \infty$, $b'_1 \rightarrow b_1$.)

En portant (33) dans la formule (31) il vient :

(34)
$$b_1 = A_1 \cos \varphi_1 = \frac{2}{n+2} \sum_{i=0}^n A_i \cos(\omega t_i - \varphi_1) \cdot \cos \omega t_i$$

Un calcul analogue montre que :

(35)
$$a_1 = A_1 \sin \varphi_1 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^n A_i \cos(\omega t_i - \varphi_1) \cdot \sin \omega t_i$$

Il est important de noter que les relations (34) et (35) sont rigoureuses quel que soit n et notamment pour n petit. Elles ne sont cependant symétriques en n comme c'était le cas pour les relations (31) et (33).

4.3.3.3. - Intérêt du procédé à échantillonnage multiple.

Dans le cas où la réponse du système excité est de la forme $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$, la mise en oeuvre de cette méthode, plus lourde que la méthode classique, est sans intérêt. Par contre, lorsque la réponse du système est de la forme $y(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t - \varphi_3)$, l'application des formules (34) et (35) fournit :

a_1 , avec une incertitude absolue: (36)

$$\Delta a_1 = \frac{2}{n} [|A_2| + |A_3|]$$

b_1 , avec une incertitude absolue: (37)

$$\Delta b_1 = \frac{2}{n+2} [|A_0| + |A_2| + |A_3|]$$

D'autre part, dans l'hypothèse d'une réponse de la forme $y(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ mais où les instants d'échantillonnage effectifs se produiraient pour $t = t_i \pm \Delta t$ avec $i = 0, 1, 2 \dots n$, les incertitudes absolues sur a_1 et b_1 seraient égales à :

(38)
$$\Delta b_1 = \omega |A_1 \sin \varphi_1| \Delta t \cdot \frac{2}{n+2}$$

$$(39) \quad \Delta \alpha_1 = \omega |R_1 \cos \varphi_1| \Delta t \cdot \frac{2}{n}$$

La comparaison des relations (27)(28) et (38)(39) d'une part, des relations (26) et (36)(37) d'autre part, montre que la méthode proposée, de mise en oeuvre plus complexe que la méthode classique, exige, par contre, pour une précision égale sur les résultats, une réalisation des instants d'échantillonnage t_i moins précise. Cette méthode a, d'autre part, le gros avantage d'atténuer l'influence des harmoniques et du niveau continu sur la détermination des grandeurs α_i et b_i attachées au fondamental de la réponse du système. Ces avantages sont d'autant plus sensibles que n est plus grand.

4.3.3.4. - Réalisation d'un dispositif d'échantillonnage synchrone. Résultats expérimentaux.

La détermination de α_i et b_i d'après les formules (35) et (34) exige que la fonction $y(t)$ soit connue pour $n + 1$ valeurs t_i équidistantes et comprises dans l'intervalle de temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Dans notre cas, où la fonction $y(t)$ est le signal électrique fourni par un capteur placé sur la structure, il suffit d'appliquer le signal $y(t)$ à l'entrée d'un convertisseur analogique-numérique et de fournir les ordres de conversion aux instants t_i , l'appareil fournissant alors les valeurs numériques :

$$\alpha_0 = y(t_0), \alpha_1 = y(t_1), \dots, \alpha_i = y(t_i), \dots, \alpha_n = y(t_n)$$

Nous avons réalisé un dispositif commandant les instants t_i dans le cas particulier $n = 8$ sur le principe* suivant : Fig. 35. Le générateur qui pilote les forces d'excitation dans l'essai au sol étant tétraphasé, on dispose, entre autres, d'une tension sinusoïdale de référence (phase 0), d'une tension déphasée de $\frac{\pi}{4}$ et d'une tension déphasée de π . L'addition analogique de ces tensions deux à deux fournit deux nouvelles tensions déphasées de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ par rapport à la tension de référence. Fig. 35. Il suffit ainsi de détecter les passages successifs par zéro de ces différentes tensions pour connaître les instants $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$ et t_8 et de déclencher le convertisseur analogique-numérique à ces mêmes instants pour connaître la valeur correspondante des échantillons :

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8, \alpha_9.$$

* L'idée du principe de ce dispositif est due à E. Le Deunff, ingénieur à l'O.N.E.R.A.

Nous avons réalisé un dispositif expérimental fondé sur ce principe. Fig. 36. Les signaux des différents capteurs ont été commutés à l'entrée E_i de l'appareil durant le temps de prélèvement des différents échantillons. Les différentes valeurs de α , ainsi que des informations complémentaires, ont été imprimés au moyen d'une imprimante rapide I.B.M. Ces données ont permis d'effectuer les calculs au centre de calcul de l'O.N.E.R.A. sur une machine I.B.M. 610. En vue d'explicitier les calculs relatifs à un capteur donné, nous allons constituer le tableau suivant :

	valeurs mesurées	valeurs calculées	
	$y(t_i)$	$\cos \omega t_i$	$\sin \omega t_i$
$i=0$	α_0	+1	0
$i=1$	α_1	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$
$i=2$	α_2	0	+1
$i=3$	α_3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$
$i=4$	α_4	-1	0
$i=5$	α_5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$i=6$	α_6	0	-1
$i=7$	α_7	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$i=8$	α_8	+1	0

En tenant compte des résultats du tableau précédent les formules (34) et (35) deviennent :

$$(40) \quad R \cos \varphi = \frac{1}{5} \left(1 \cdot \alpha_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \alpha_3 - 1 \cdot \alpha_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_5 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \alpha_7 + 1 \cdot \alpha_8 \right)$$

$$(41) \quad R \sin \varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_5 - 1 \cdot \alpha_6 - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_7 \right)$$

Les coefficients $1, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont fixes quel que soit le capteur et la fréquence d'excitation. Il n'est pas nécessaire d'échantillonner la tension qui pilote l'excitation ni la tension en quadrature, car le choix de n permet de calculer les valeurs correspondantes qui restent fixes quelle que soit la fréquence. Cela constitue un des gros avantages de l'échantillonnage synchrone effectué comme il a été décrit plus haut.

La Fig. 37 montre une courbe $R=g(F)$ dont les points ont été calculés à partir des valeurs α_i fournies par le dispositif utilisé.

Dans une version définitive de l'installation, grâce à la présence d'un calculateur travaillant en temps réel, l'acquisition des valeurs α_i , ainsi que les calculs selon les formules (40) et (41) pourront se faire à une cadence très rapide.

4.4. - Organigramme des opérations à effectuer par l'unité centrale lors du processus d'appropriation de l'excitation :

Nous avons schématisé Fig. 38 le processus de réglage d'un excitateur par l'unité centrale. Ce processus doit être répété pour tous les autres excitateurs. Pour la compréhension des opérations, on se reportera à la Fig. 17. Le calcul des $R_i \sin \varphi_i$ et $R_i \cos \varphi_i$ à partir des α_i se fera à l'aide d'un sous-programme.

5 - CONCLUSION GENERALE.

Nous avons défini et expérimenté des opérations systématiques en vue d'approprier l'excitation à un mode propre de la structure conservative associée, l'appropriation étant réalisée à la fréquence propre de ce mode. Les résultats obtenus permettent de concevoir complètement une installation susceptible de rendre le procédé opérationnel.

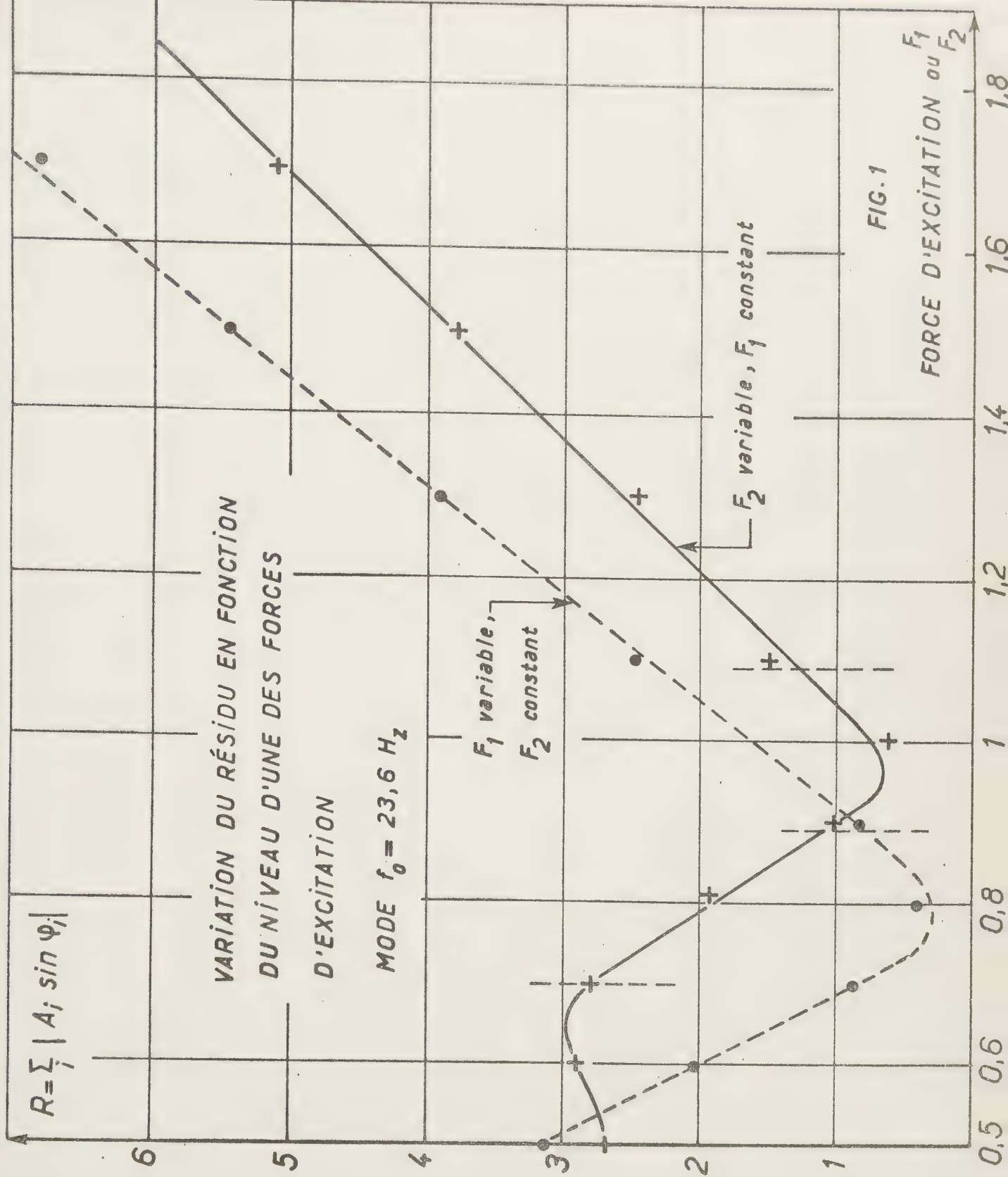
Les facilités d'expérimentation apportées par cette installation, ainsi que la diversité des structures soumises à l'étude devront permettre de dégager des recommandations générales concernant l'ordre de réglage des différentes forces d'excitation, le nombre de forces à appliquer, ainsi que leurs valeurs initiales, de manière à obtenir une rapidité de convergence toujours plus grande et une appropriation toujours mieux ajustée.

- o - o - o -

- BIBLIOGRAPHIE -

- [1] R. MAZET - Mécanique vibratoire.
Dunod-Paris 1966
- [2] G. de VRIES - Les principes de l'essai global de vibration d'une structure.
Recherche Aérospatiale n° 108 (septembre-octobre 1965)
- [3] R. MAZET - C. BEATRIX - Détermination par essais de vibration au sol des caractéristiques d'une structure d'avion nécessaire aux calculs de "flutter" et à la recherche des corrections éventuelles.
Note technique O.N.E.R.A. n° 72 (1963)
- [4] C. BEATRIX - Les procédés expérimentaux de l'essai global de vibration d'une structure.
Recherche Aérospatiale n° 109 (novembre-décembre 1965)
- [5] G. de VRIES - Le problème de l'appropriation des forces d'excitation dans l'essai de vibration.
Recherche Aérospatiale n° 102 (septembre-octobre 1964)
- [6] B. M. FRAEYS DE VEUBEKE - Analyse de la réponse forcée des systèmes amortis par la méthode des déphasages caractéristiques.
Revue française de Mécanique n° 13 (1965)
- [7] B. M. FRAEYS DE VEUBEKE - Déphasages caractéristiques et vibrations forcées d'un système amorti.
Académie Royale de Belgique - Bulletin de la Classe des Sciences Série 5 - Vol. XXXIV -page 626 (1948)
- [8] E. SCHULTZE - Die Erregung reiner Eigenschwingungen von Flugzeugflügeln.
ZAMP Vol. 6 (1955)
- [9] G. de VRIES - Analyse des réponses d'une structure mécanique dans l'essai global de vibration.
Revue française de Mécanique n° 13 (1965)

- [10] G. LE DEUNFF - Commutateur électronique pour la visualisation de l'essai de vibration
Recherche Aérospatiale n° 105 (mars-avril 1965)
- [11] R.C. LEWIS - D. L. WRISLEY - A system for excitation of pure natural modes of complex structure.
J.A.S. novembre 1950
- [12] F. J. HAWKINS - An automatic resonance testing technique for exciting normal modes of vibration of complex structures.
Revue française de Mécanique n° 13 (1965)
- [13] D. CLERC - Une méthode d'appropriation des forces d'excitation aux modes propres non amortis d'une structure.
Recherche Aérospatiale n° 85 (novembre-décembre 1961)
- [14] D. CLERC - Sur l'appropriation des forces d'excitation lors des essais de vibrations en régime harmonique.
Recherche Aérospatiale n° 87 (mars-avril 1962)
- [15] R. W. TRAILL-NASH - On the excitation of pure natural modes in Aircraft resonance testing.
J.A.S. (décembre 1958)
- [16] R. W. TRAILL-NASH - Some theoretical aspects of resonance testing and proposals for a technique combining experiment and computation.
Aeronautical Research Laboratories - Melbourne (1961)
Report ARL/DR 280
- [17] KENNEDY - PANCU - Use of vectors in vibration measurement and analysis.
J.A.S. Vol 14 - n° 11 (novembre 1947)
- [18] A. ANGOT - Compléments de mathématiques.
Editions de la Revue d'Optique - Paris (1965)



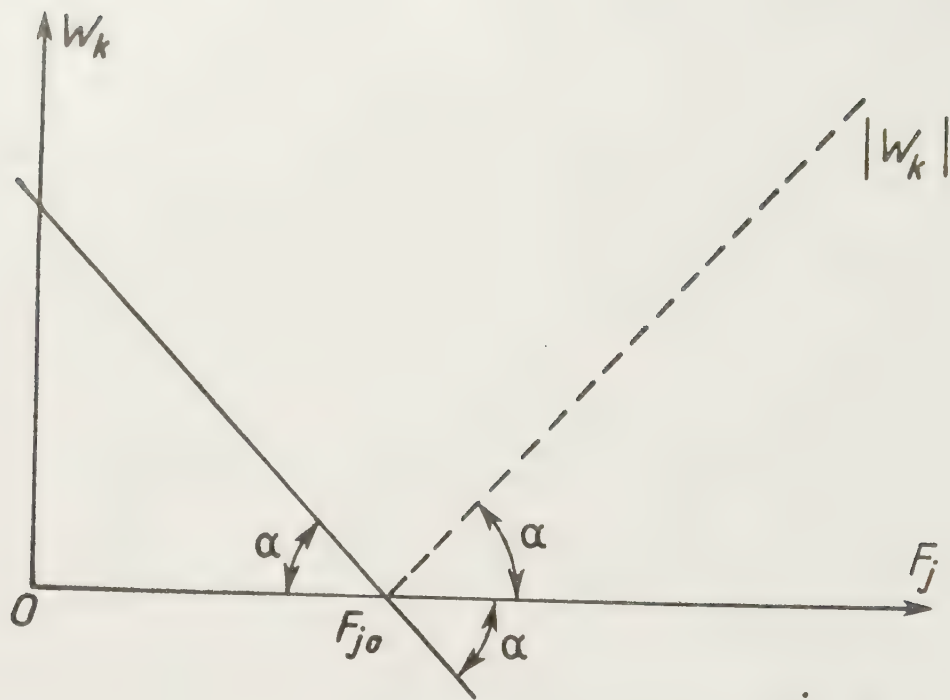


FIG. 2

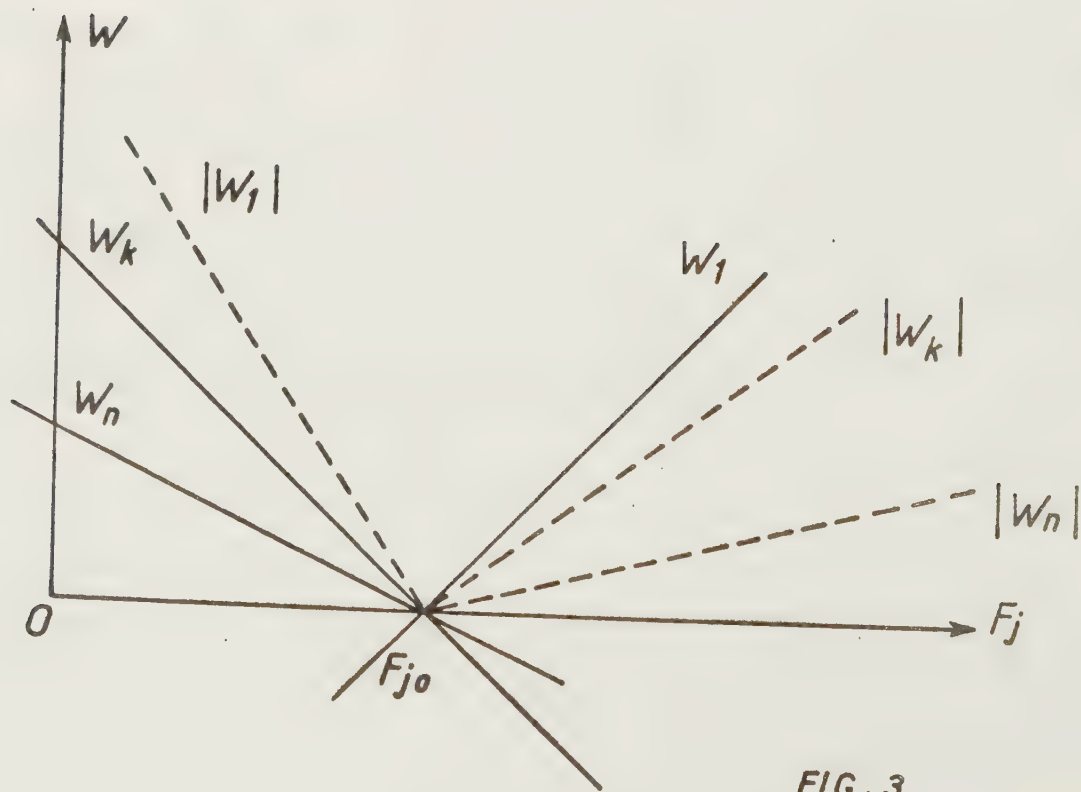


FIG. 3

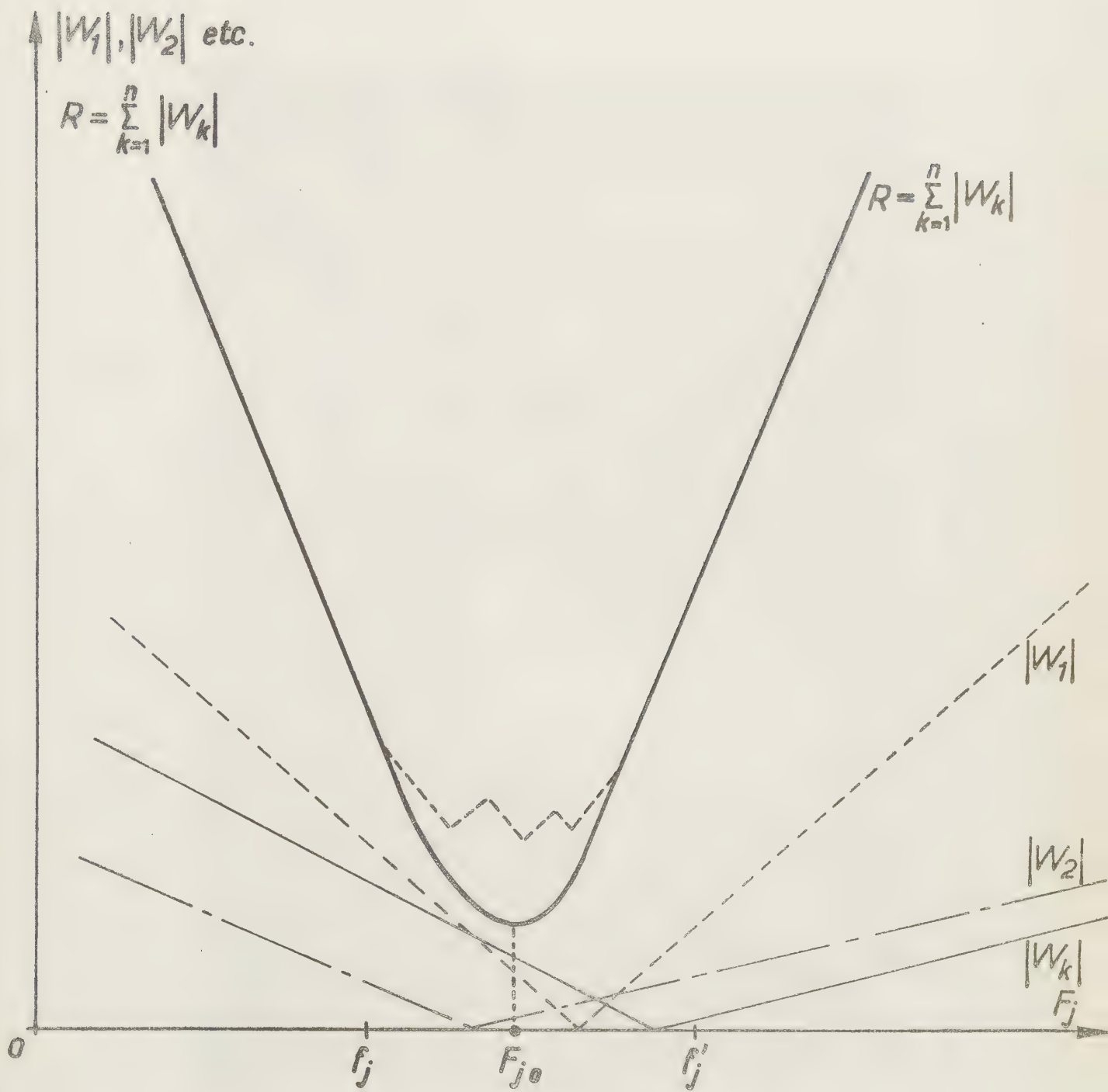


FIG. 4

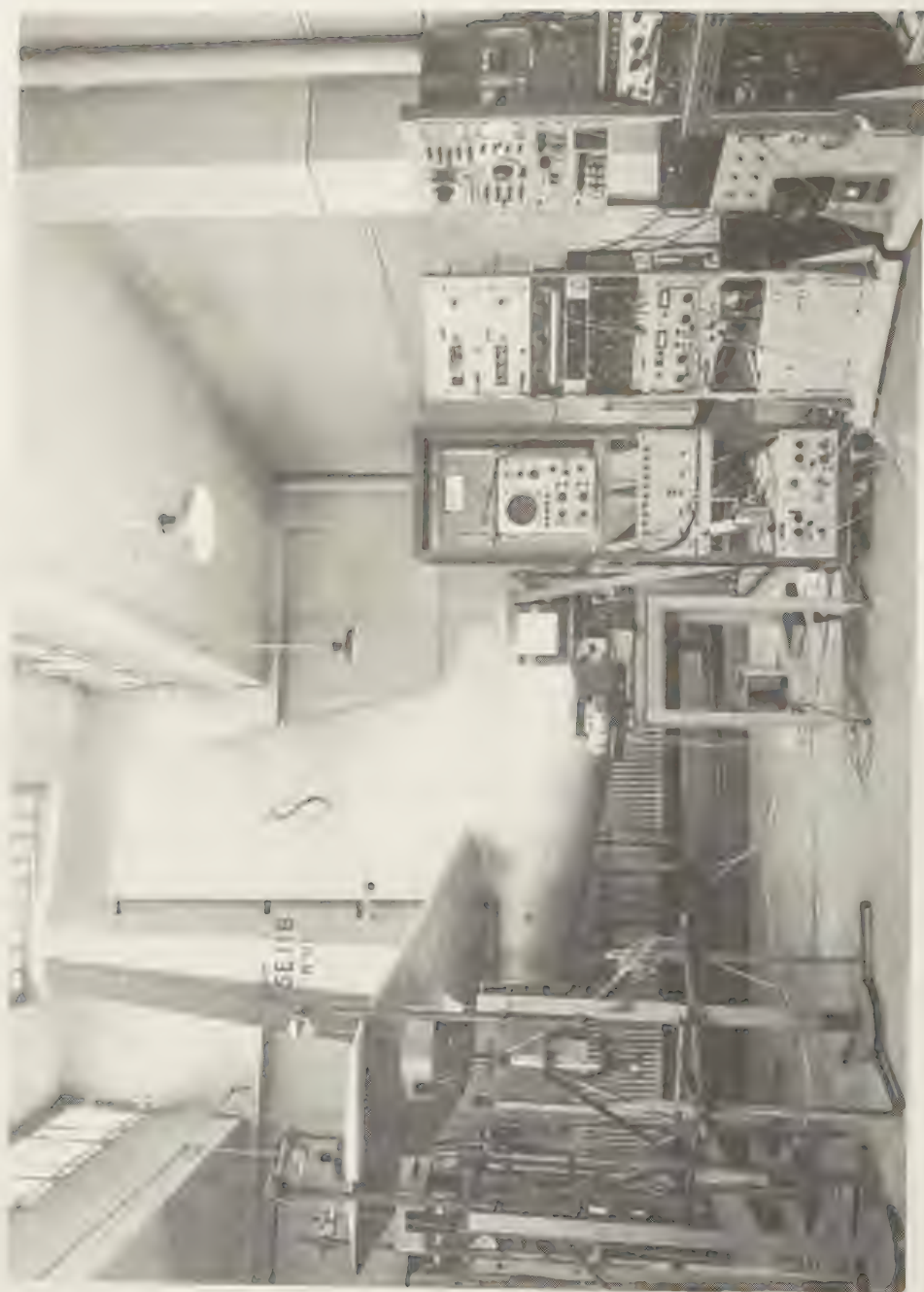


FIG. 5

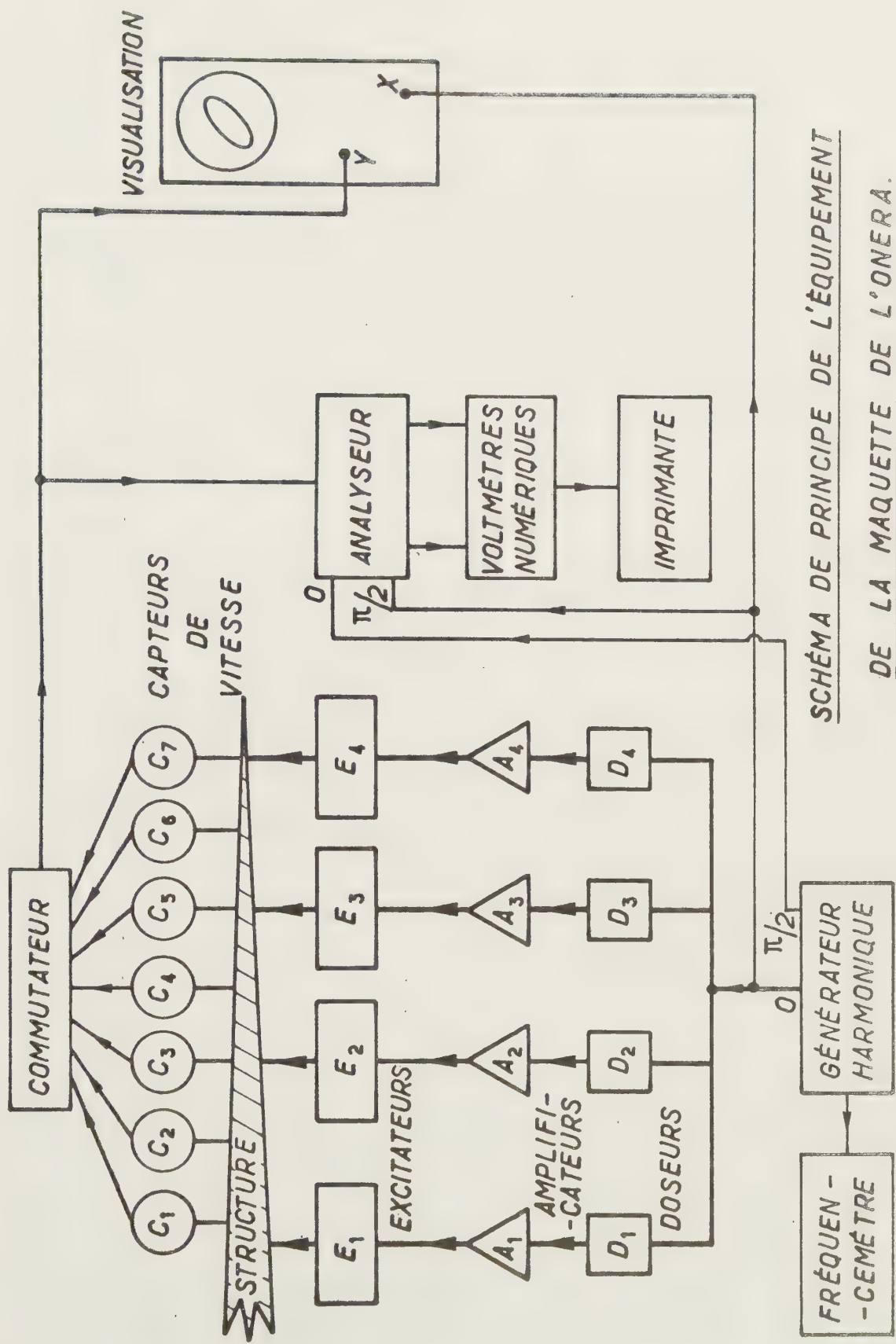
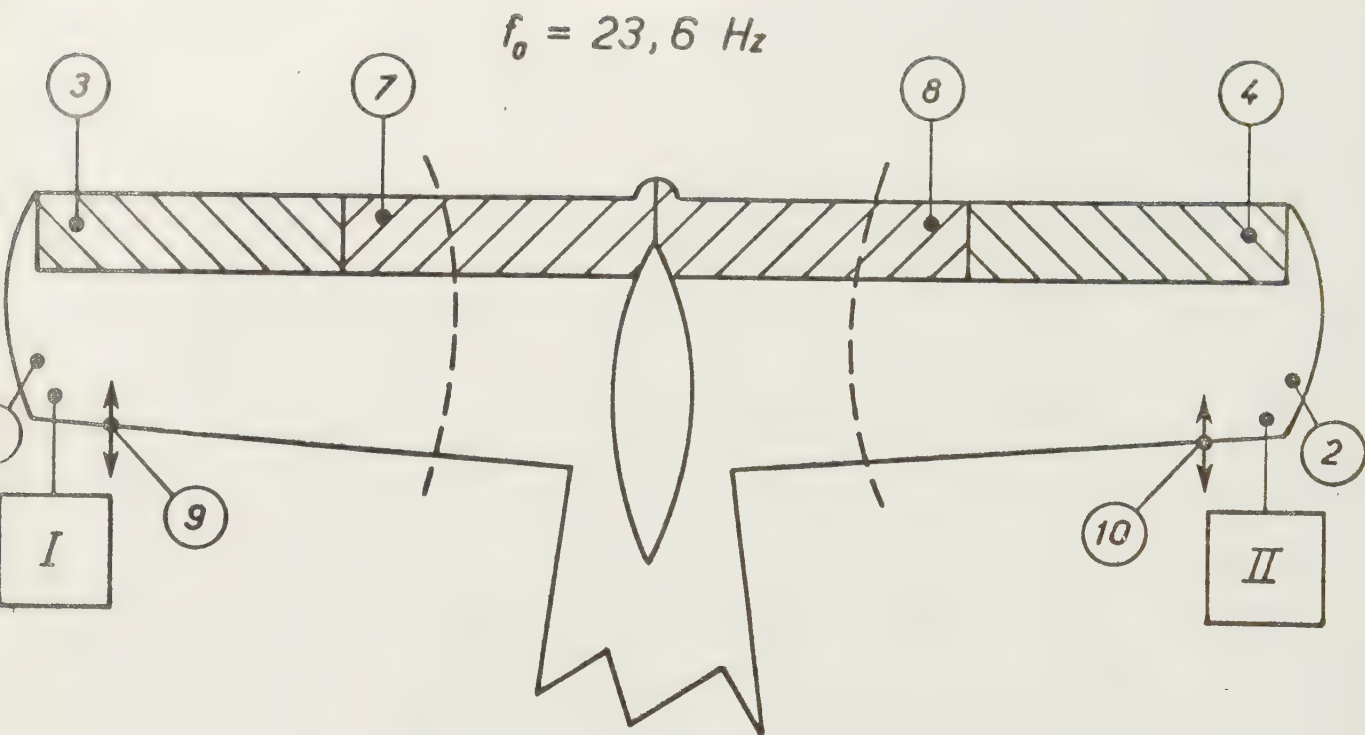


SCHÉMA DE PRINCIPE DE L'ÉQUIPEMENT
DE LA MAQUETTE DE L'ONERA.

FIG. 6



- Excitateur*
- Capteur de vitesse*

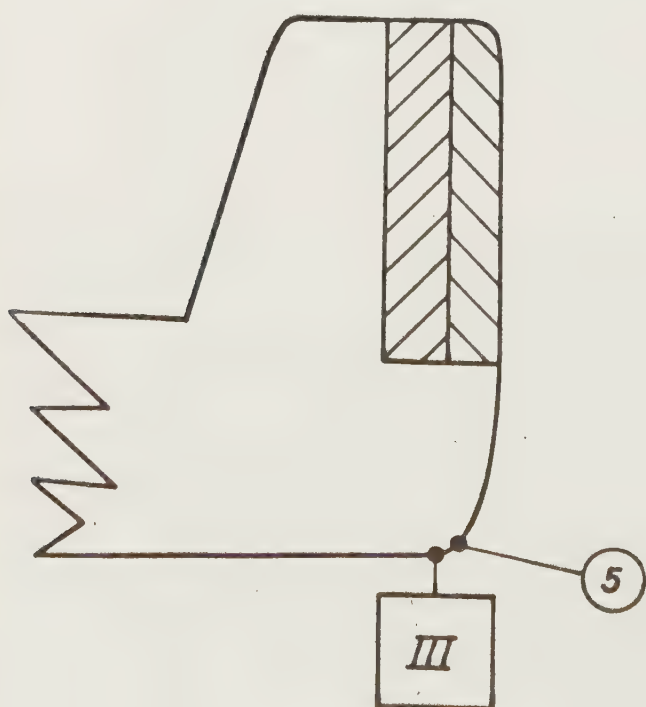


FIG. 7

EMPLACEMENT DES CAPTEURS
ET DES EXCITEURS

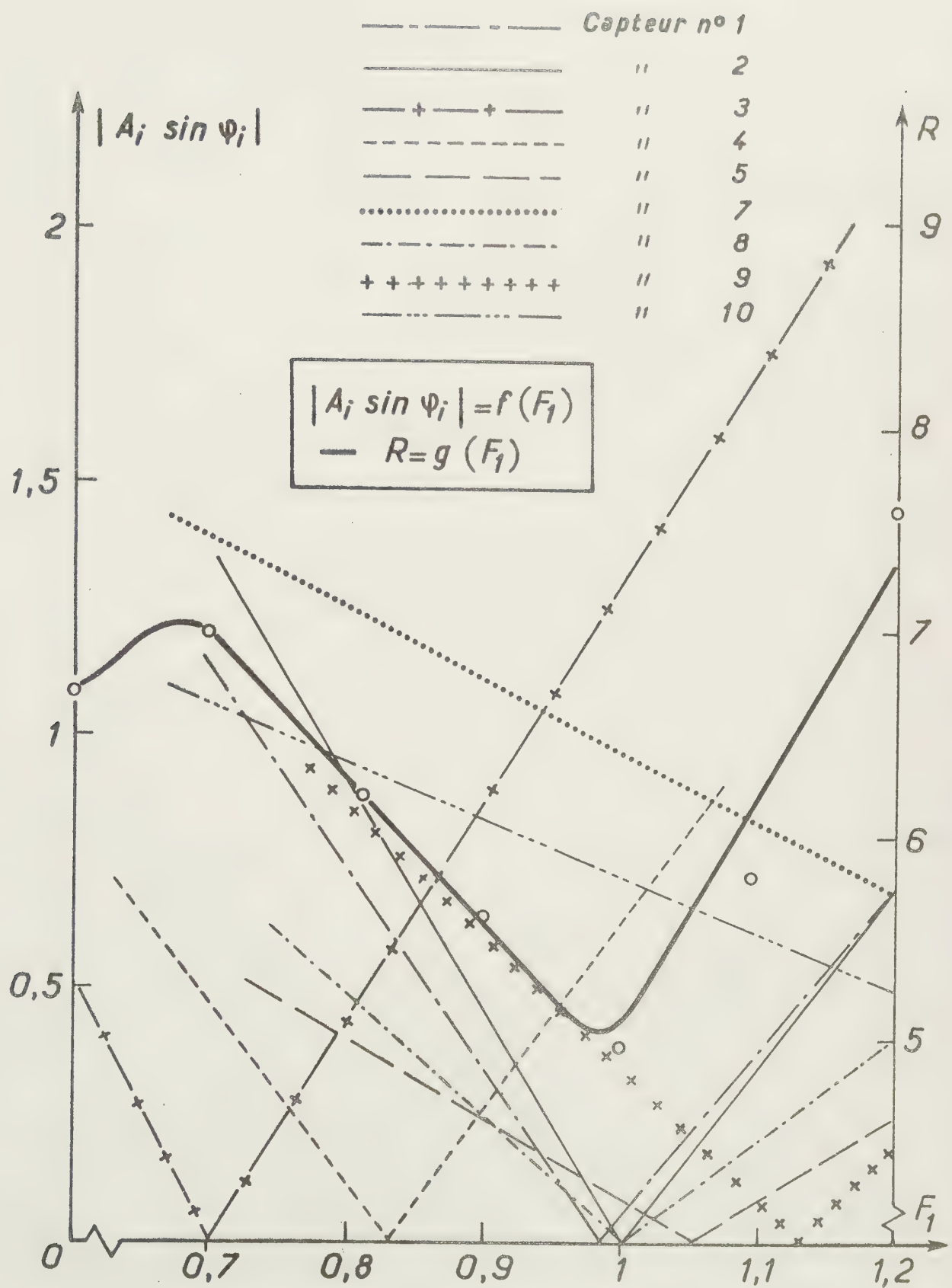


FIG. 8

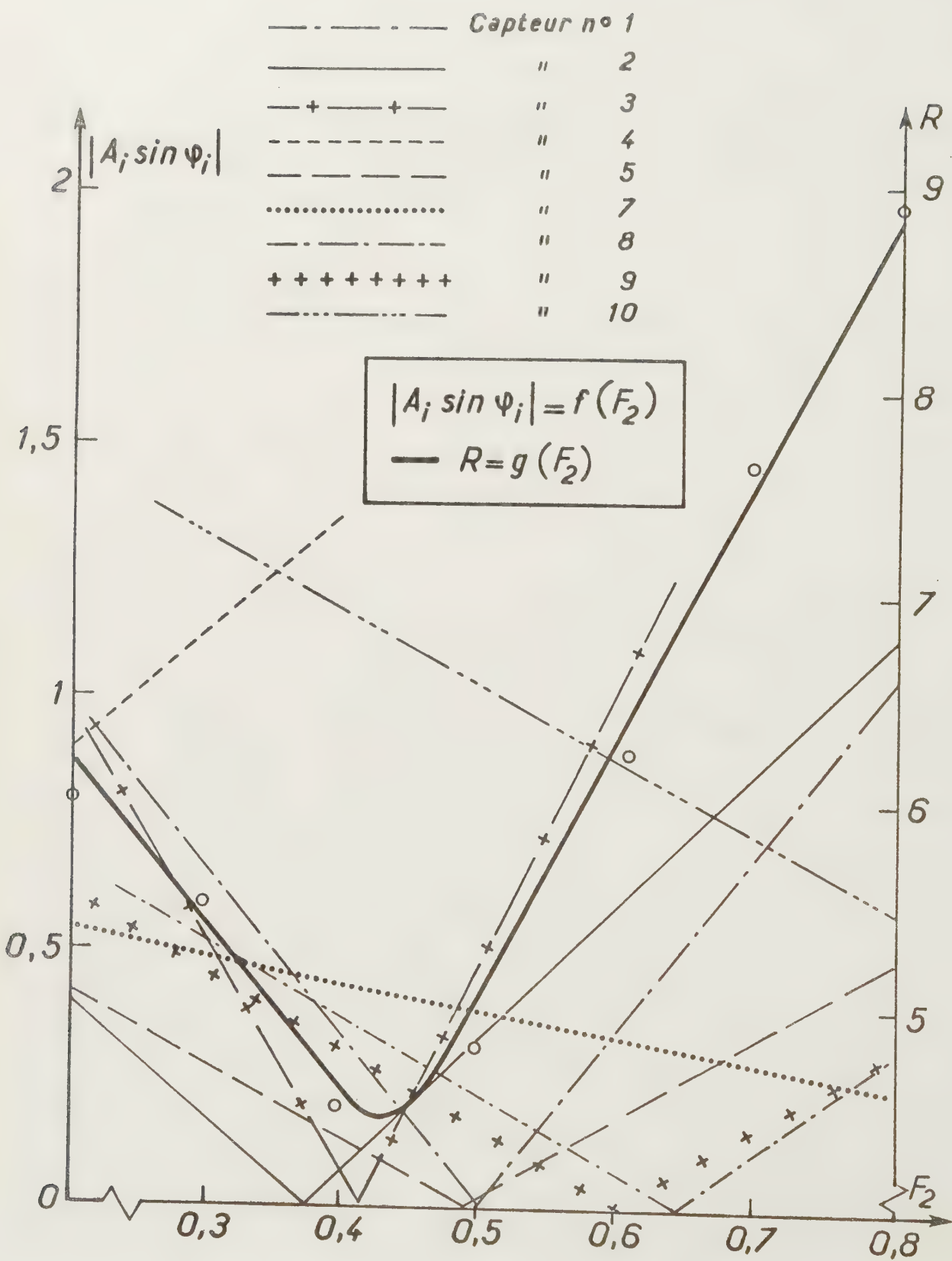


FIG. 9

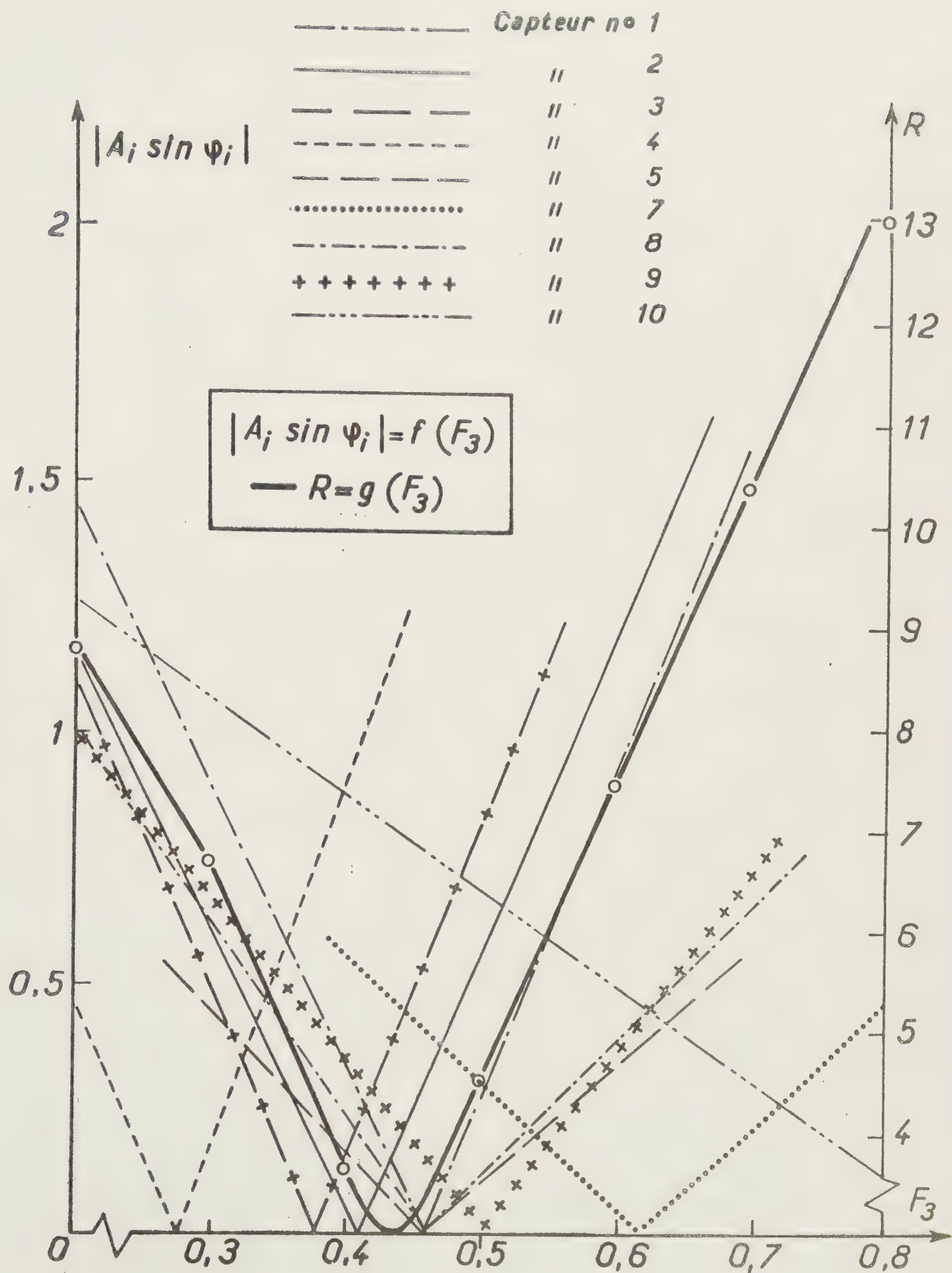


FIG. 10

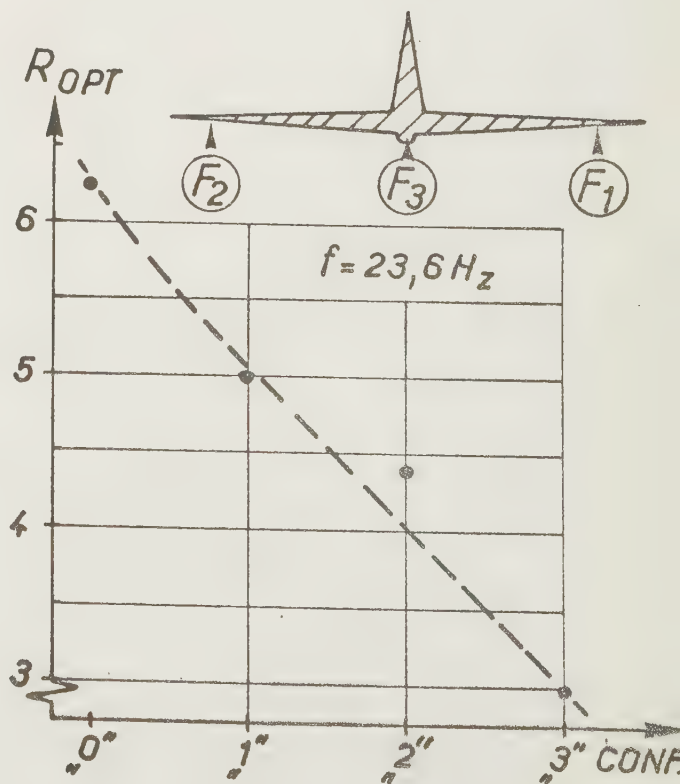
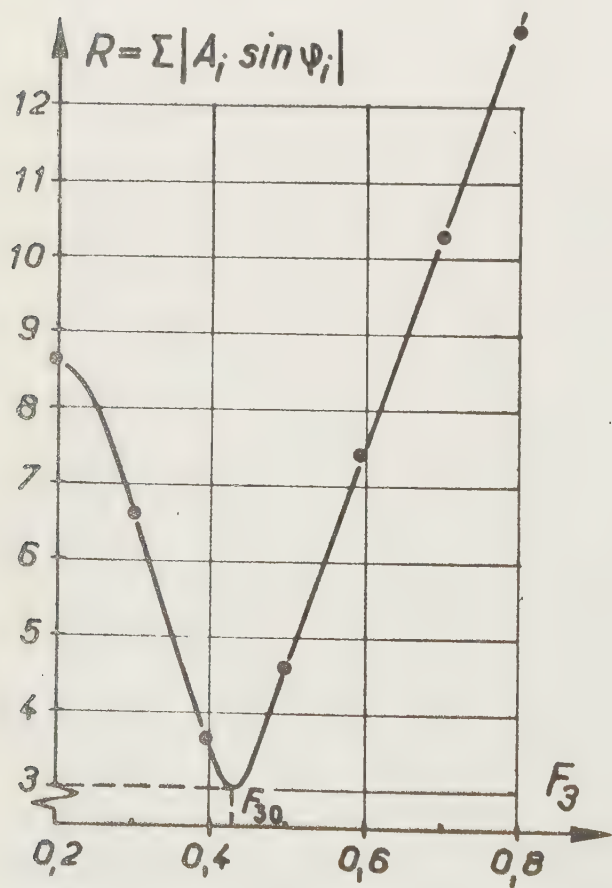
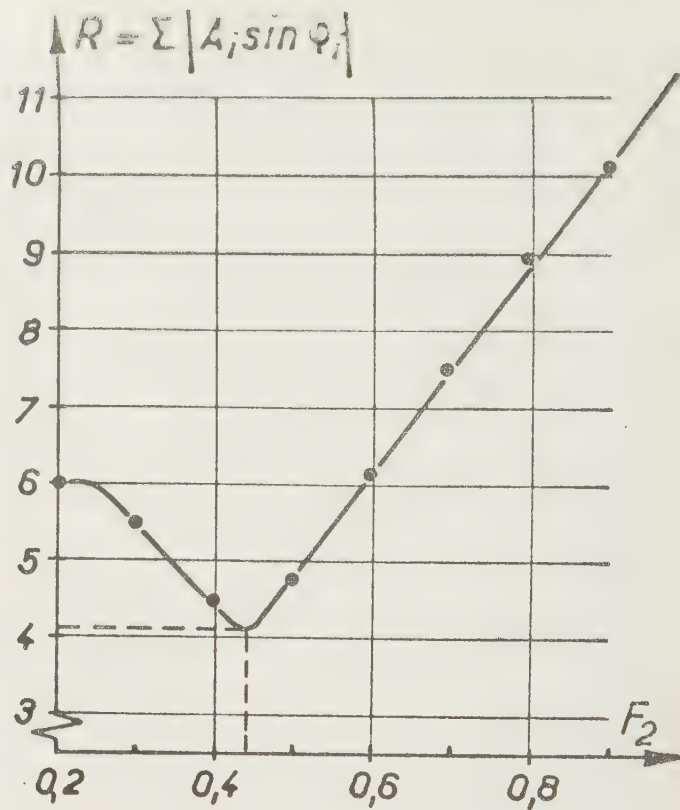
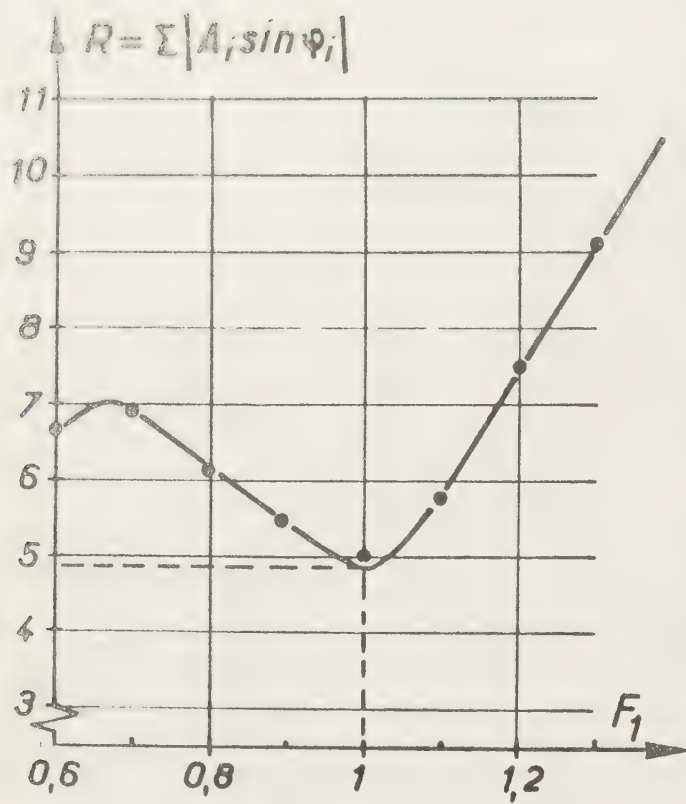


FIG. 11

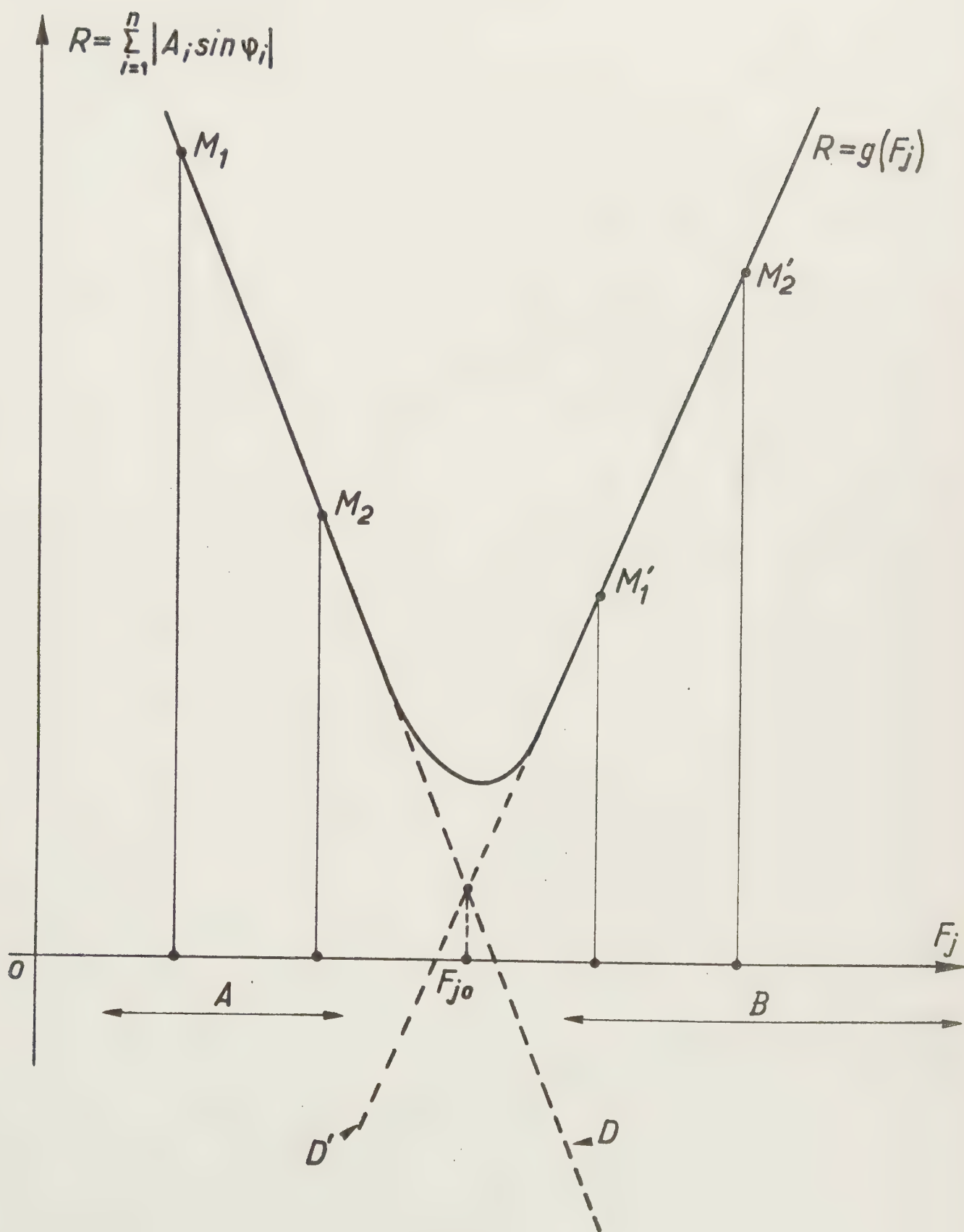


FIG. 12

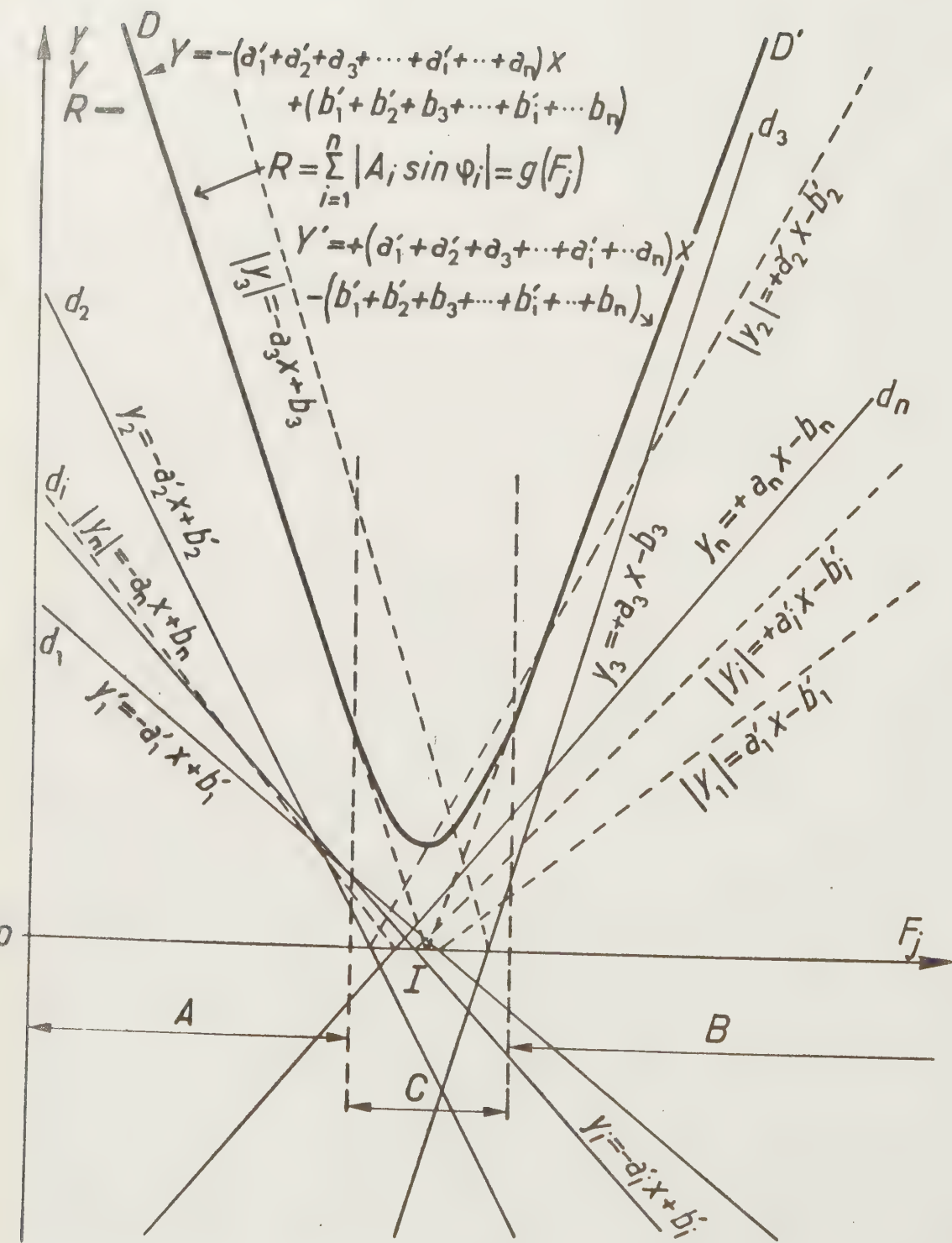


FIG. 13

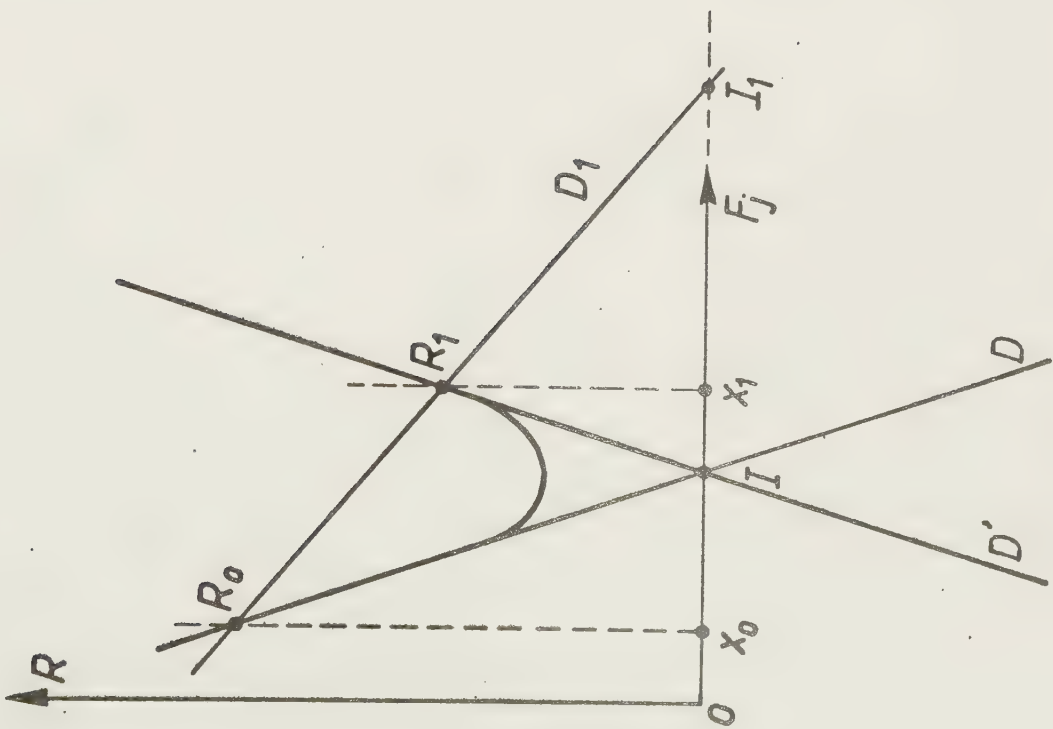


FIG. 14

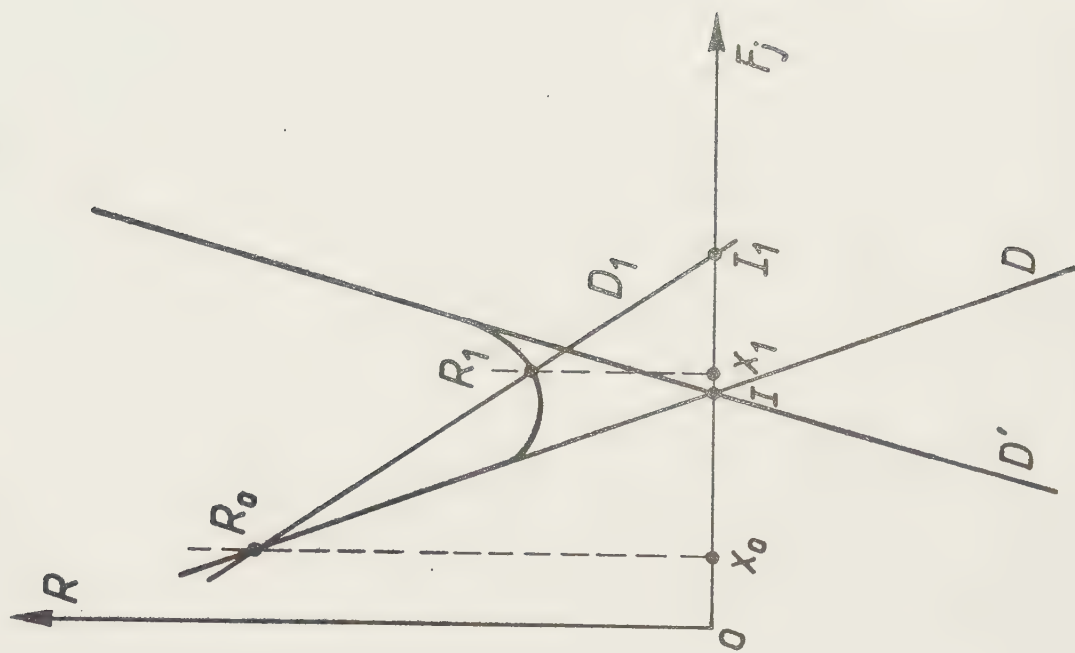


FIG. 15

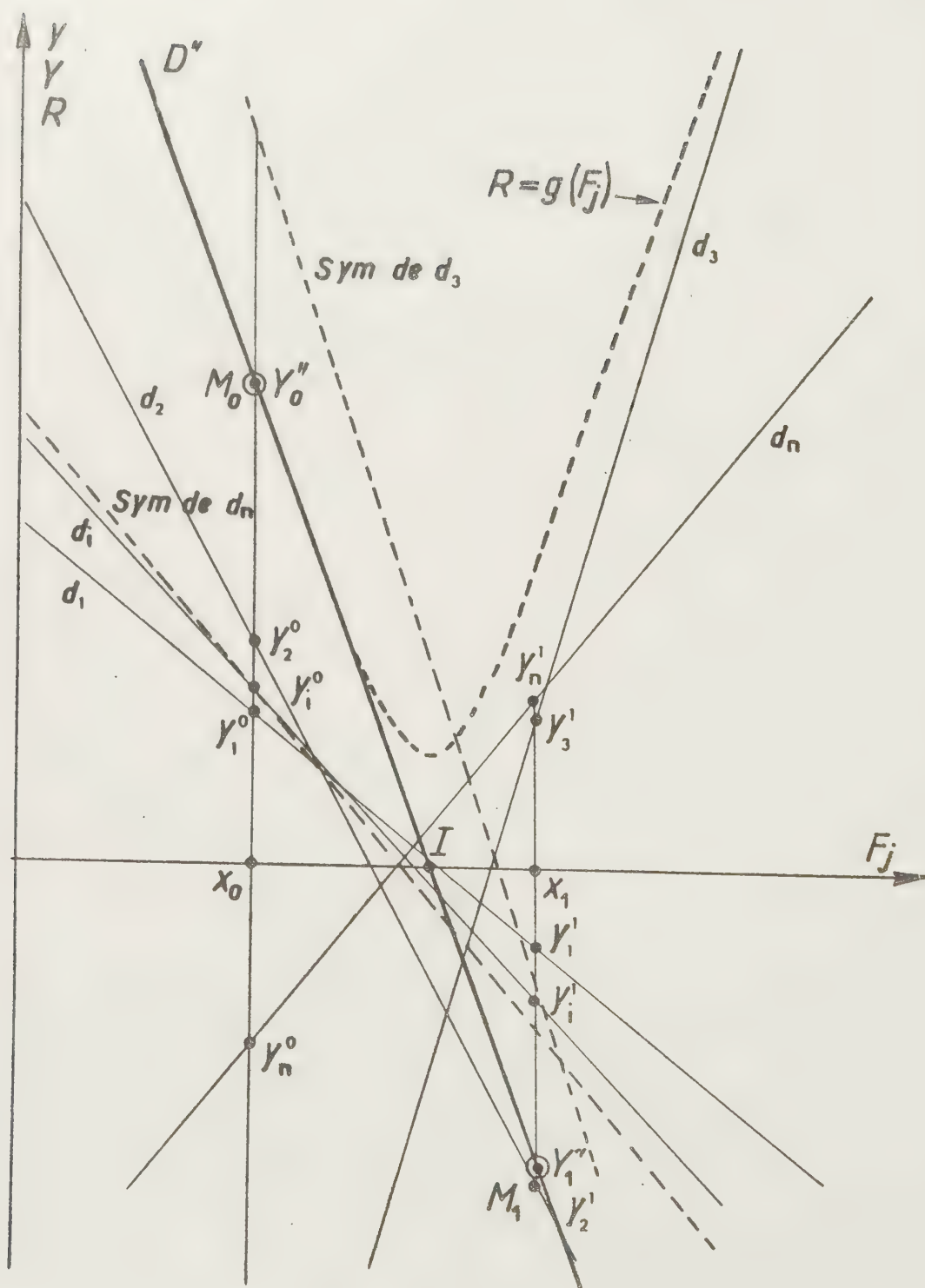


FIG. 16

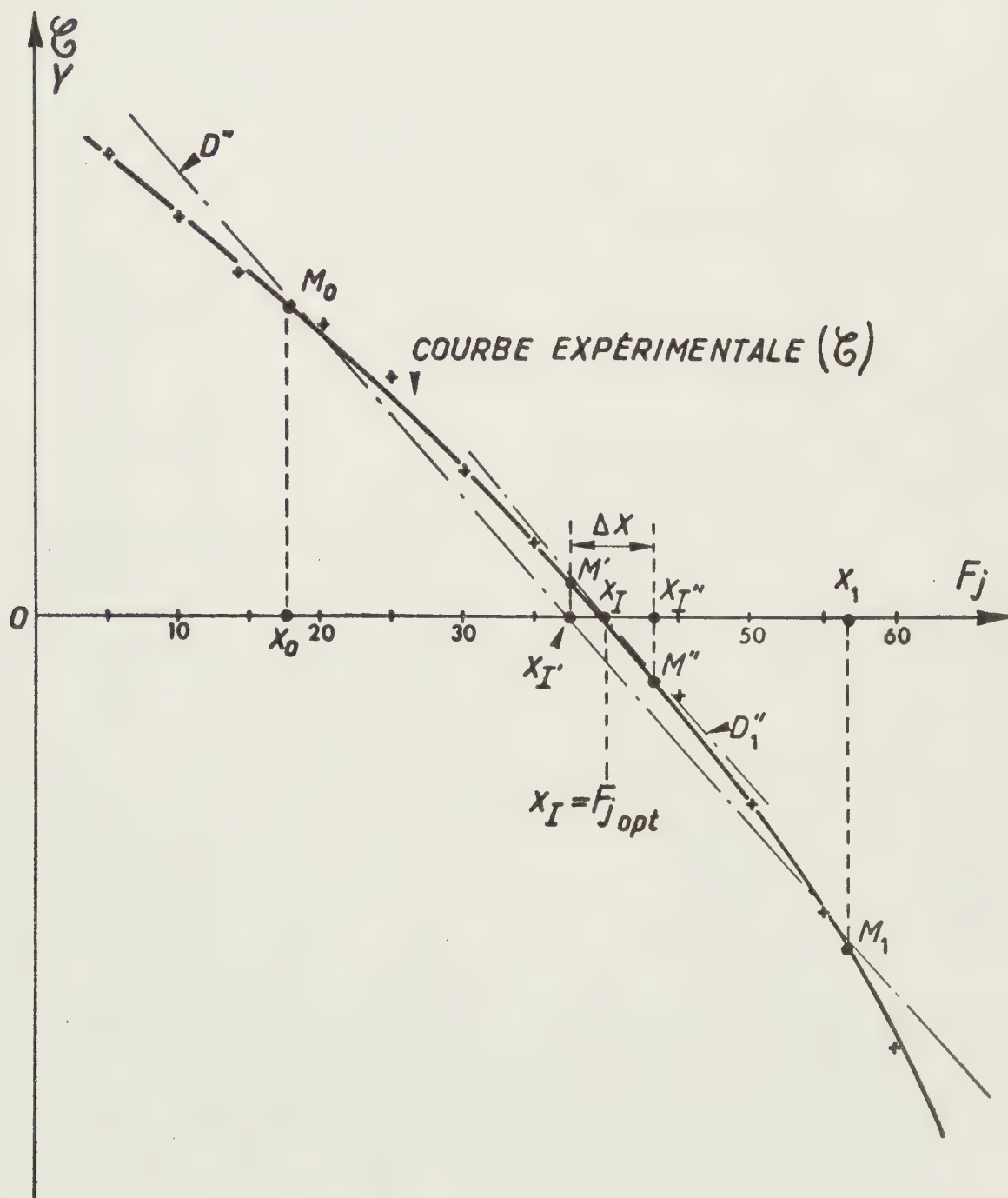


FIG. 17

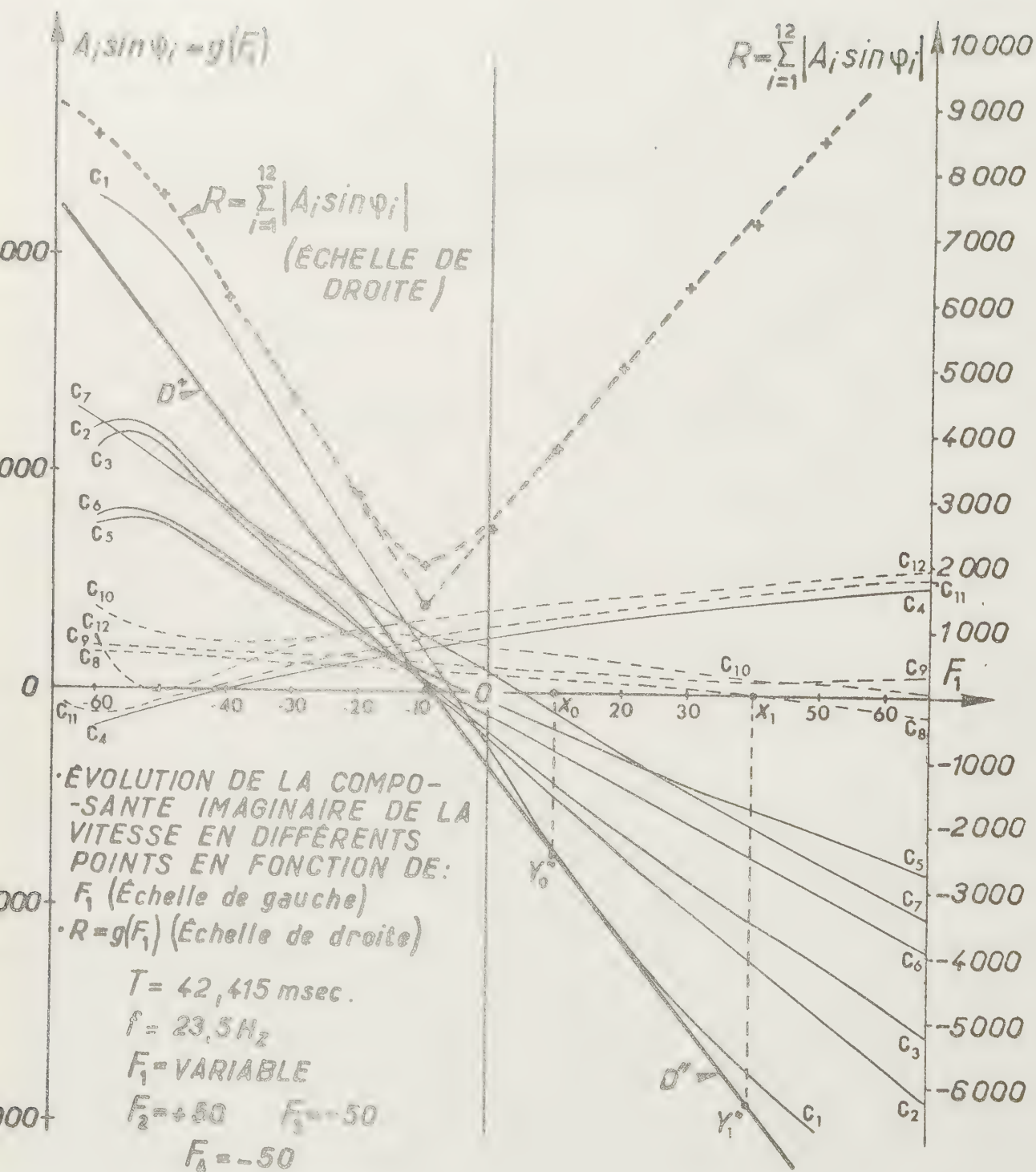


FIG. 18

FIG. 19

VARIATION DE LA RÉSONANCE DE PHASE
EN FONCTION DU NIVEAU D'EXCITATION

T_{ms}

44,500

43,500

42,500

41,500

50

100

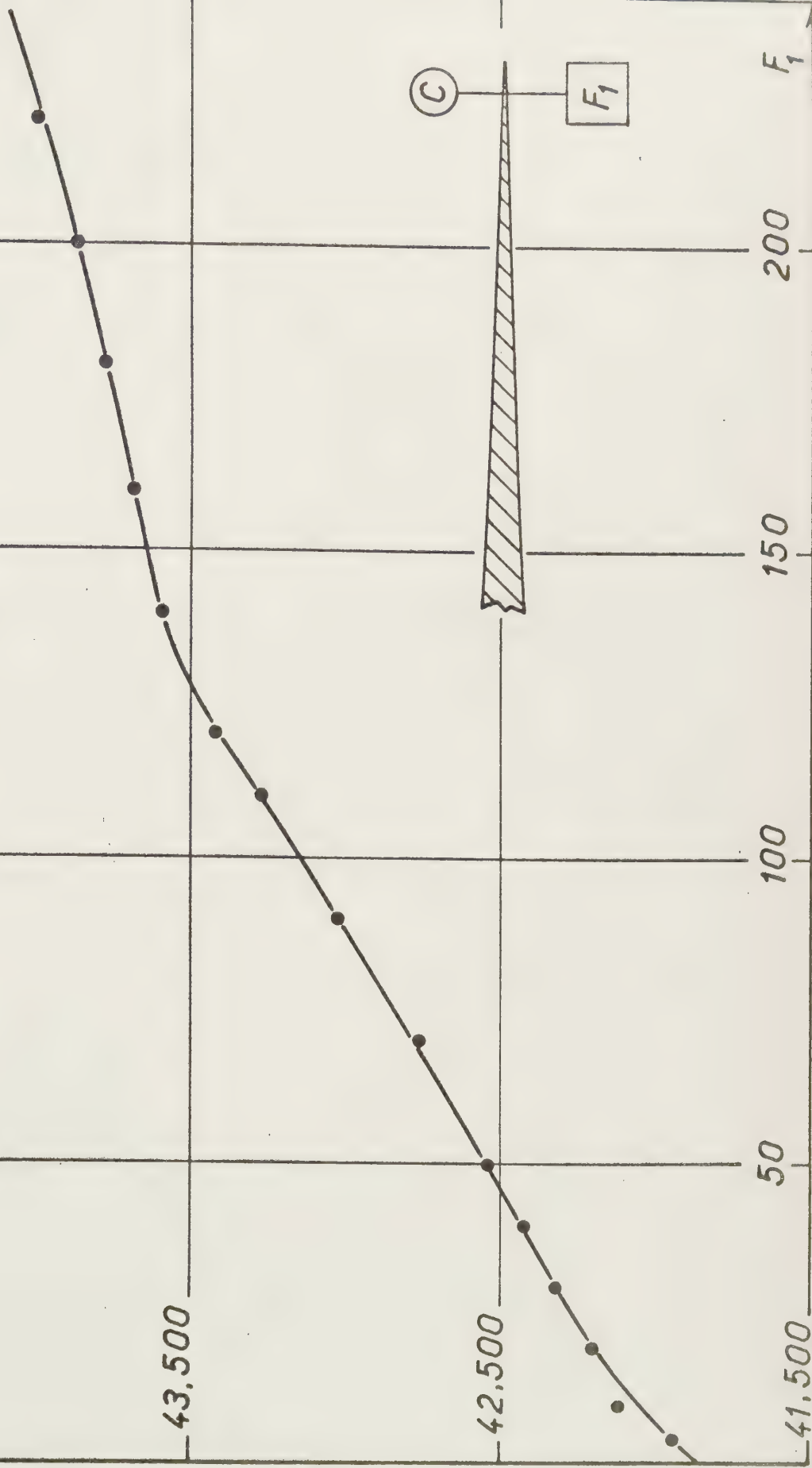
150

200

F_1

(C)

F_1



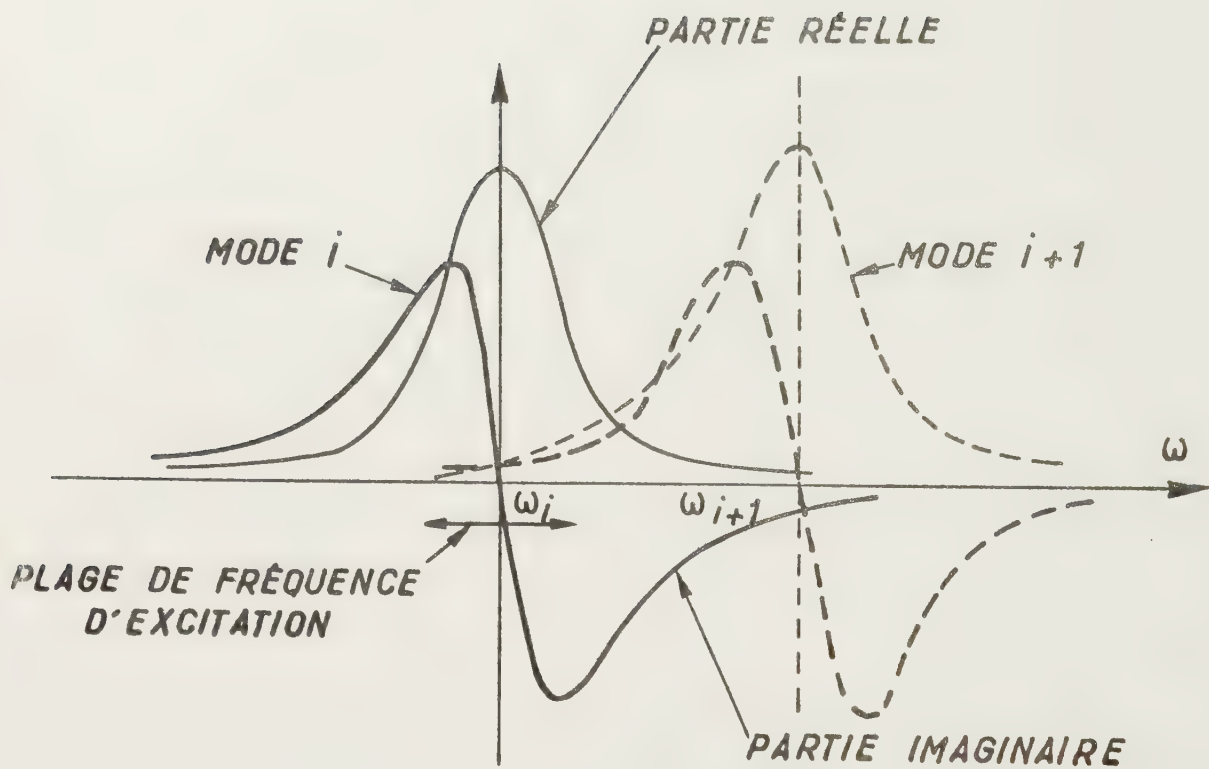


FIG. 20

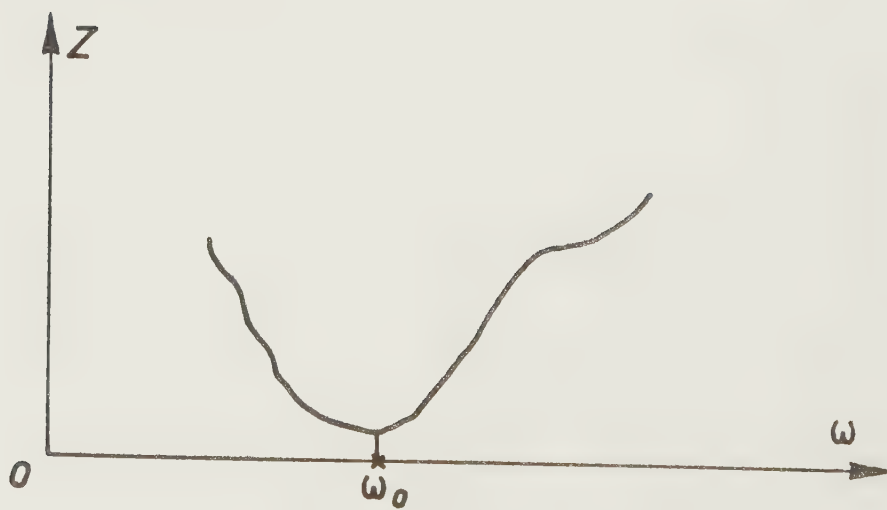


FIG. 21

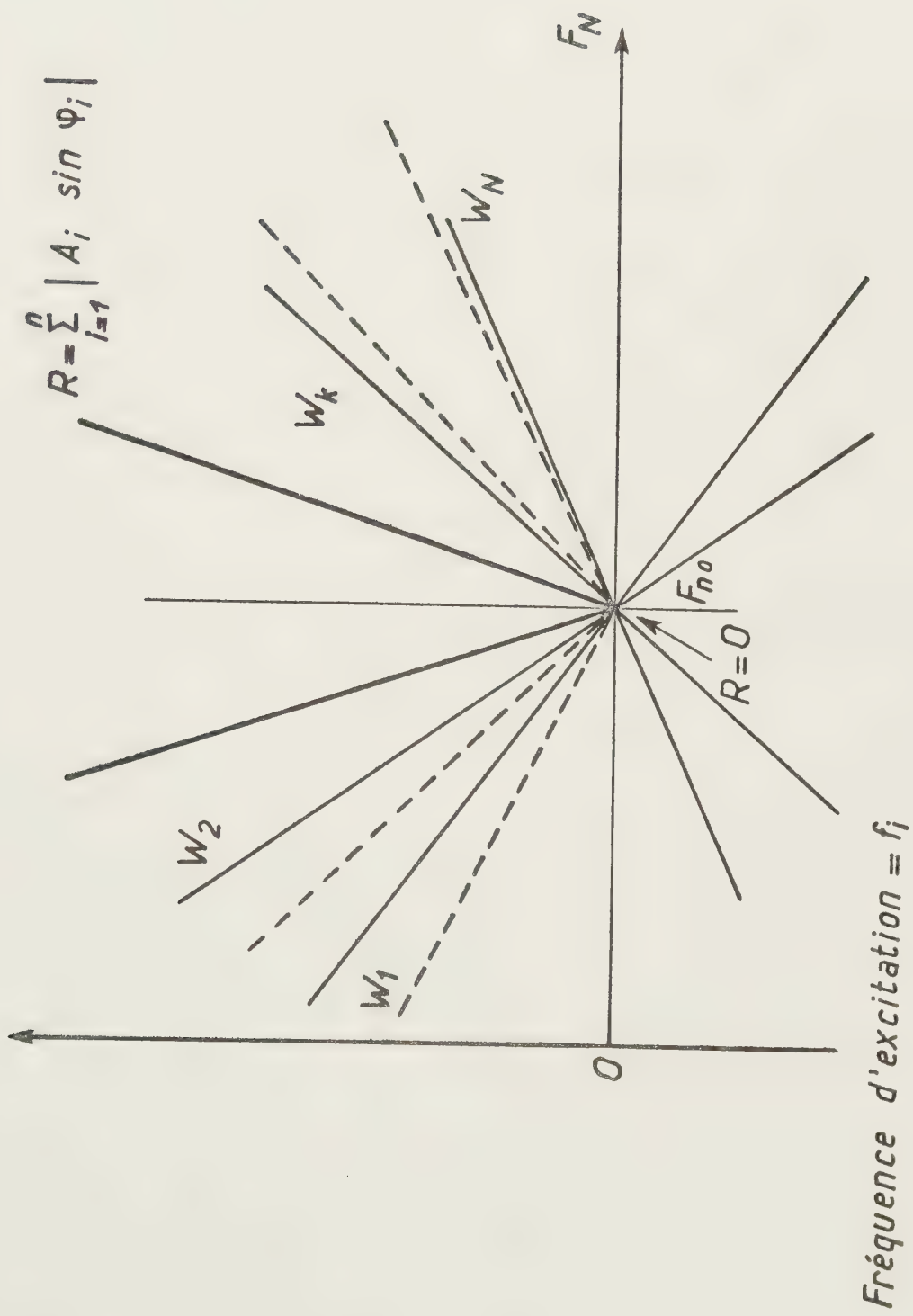


FIG. 22

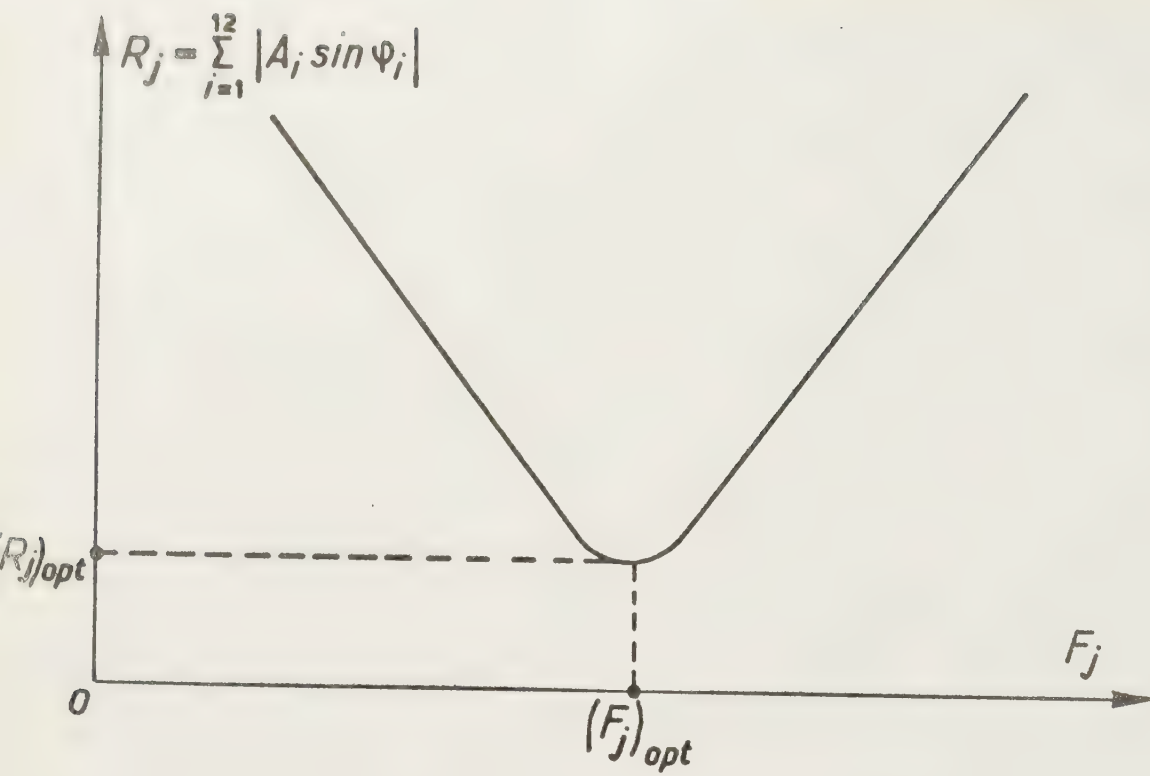


FIG. 23

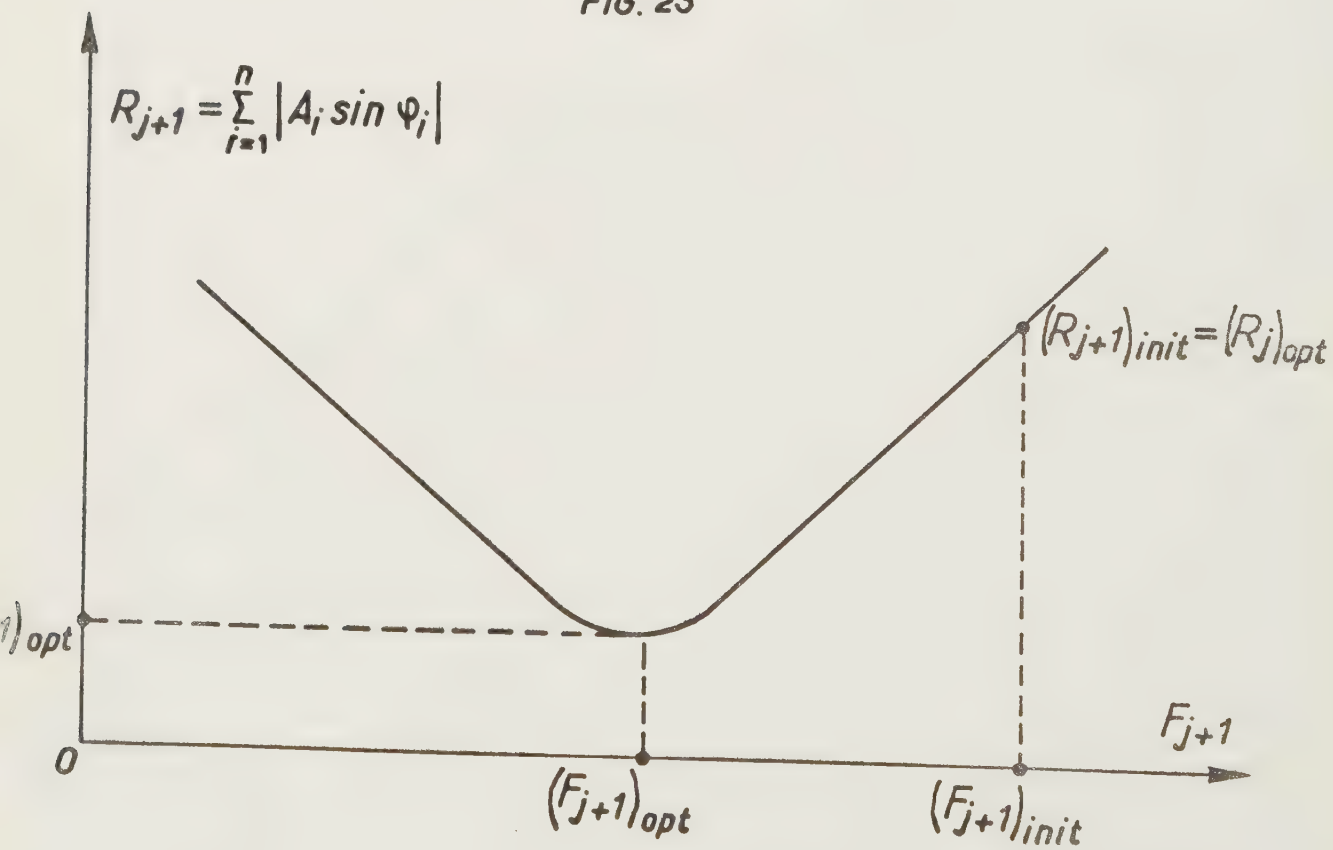


FIG. 24

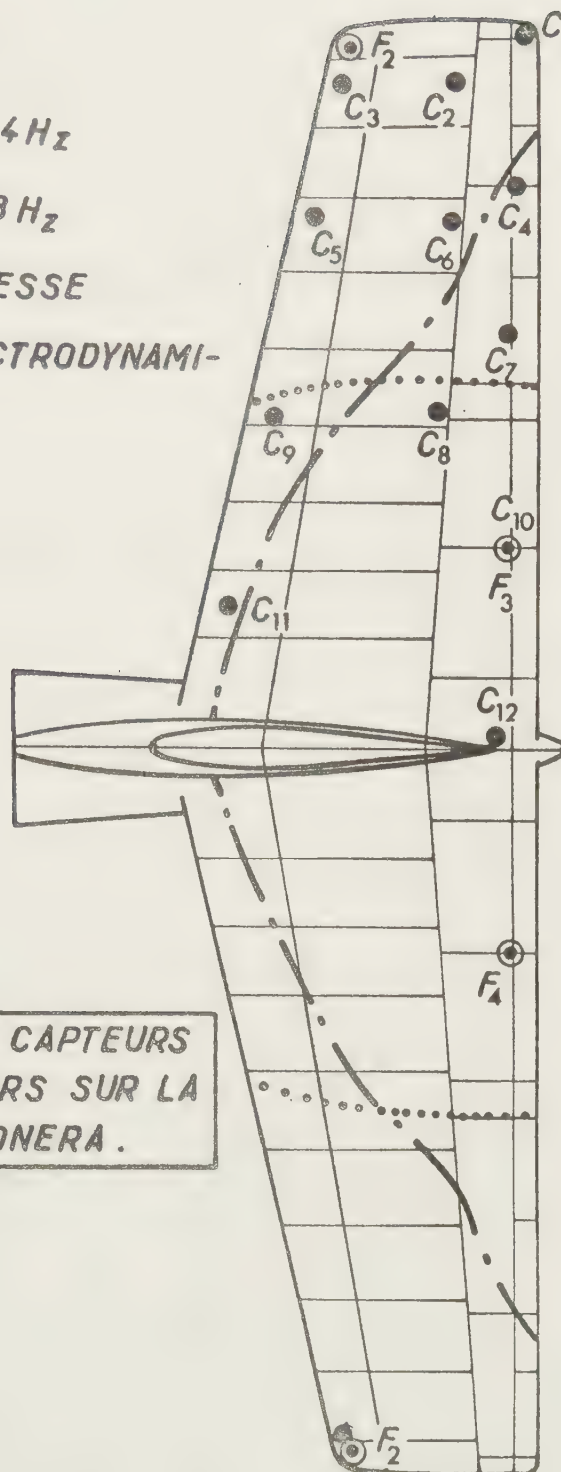
LIGNES DE NOEUDS

..... $f_0 = 23,54 \text{ Hz}$

— — — — — $f_0 = 27,18 \text{ Hz}$

● CAPTEUR DE VITESSE

⊙ EXCITATEUR ELECTRODYNAMIQUE.



EMPLACEMENT DES CAPTEURS
ET DES EXCITEURS SUR LA
MAQUETTE DE L'ONERA.

FIG. 25

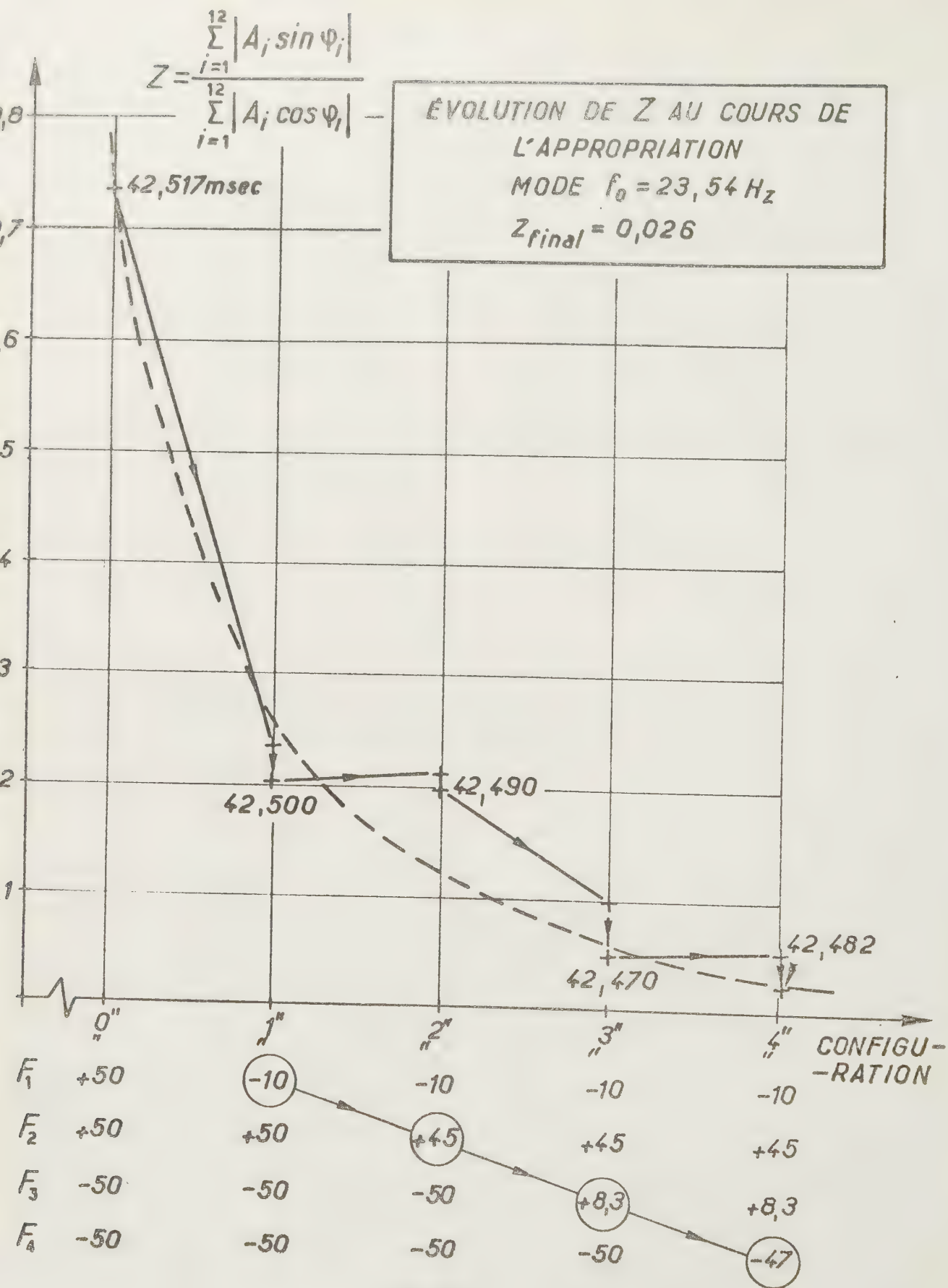
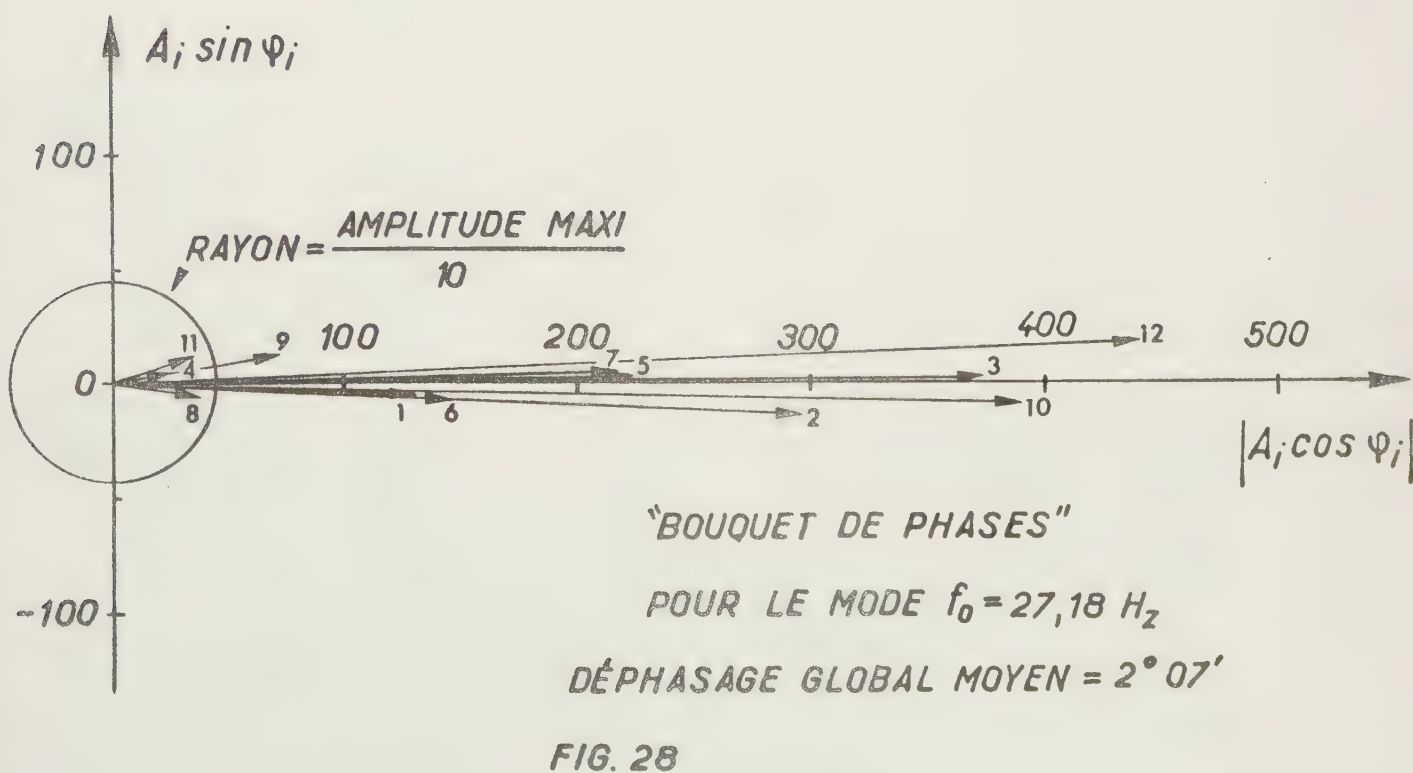
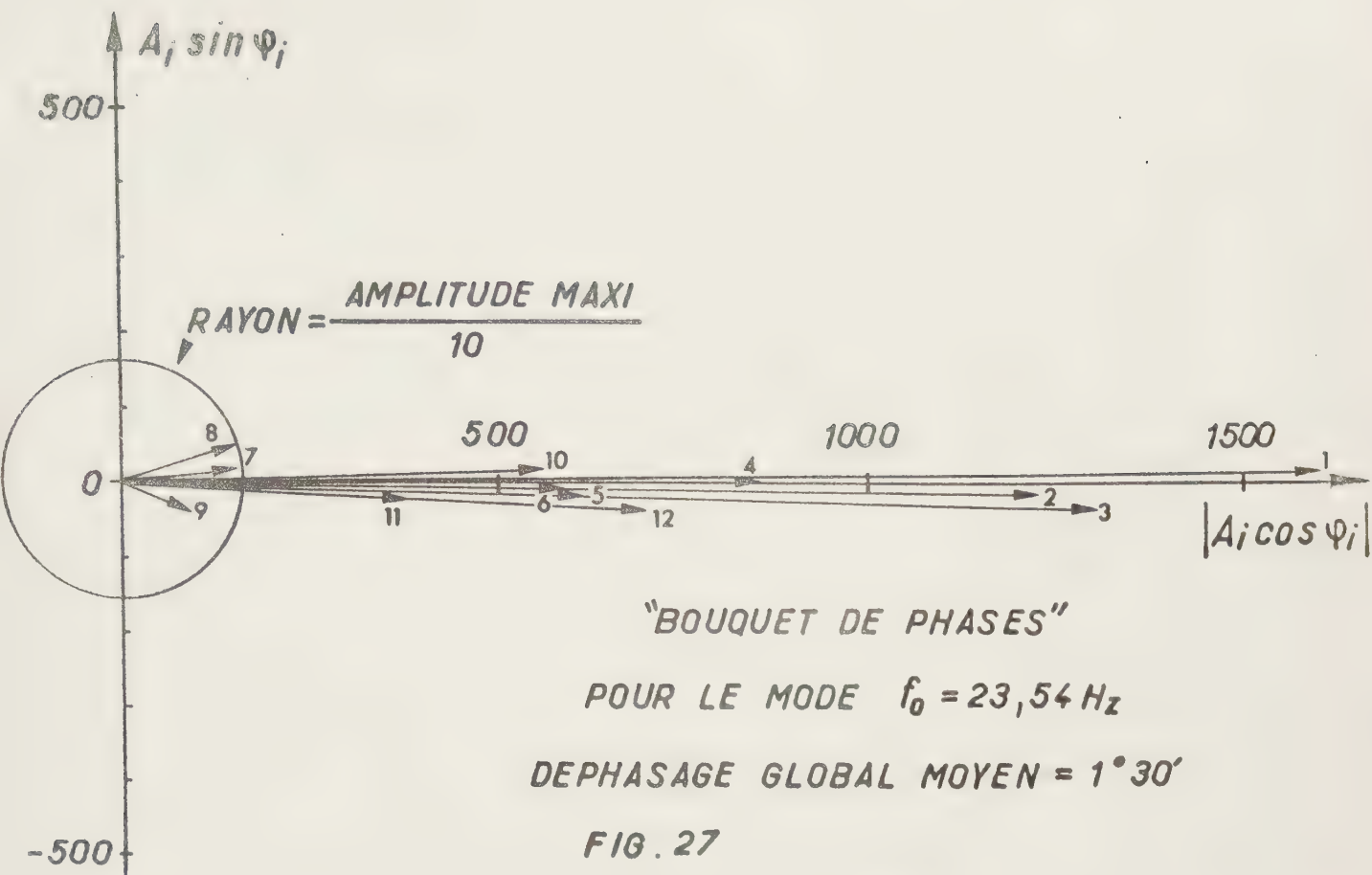


FIG. 26



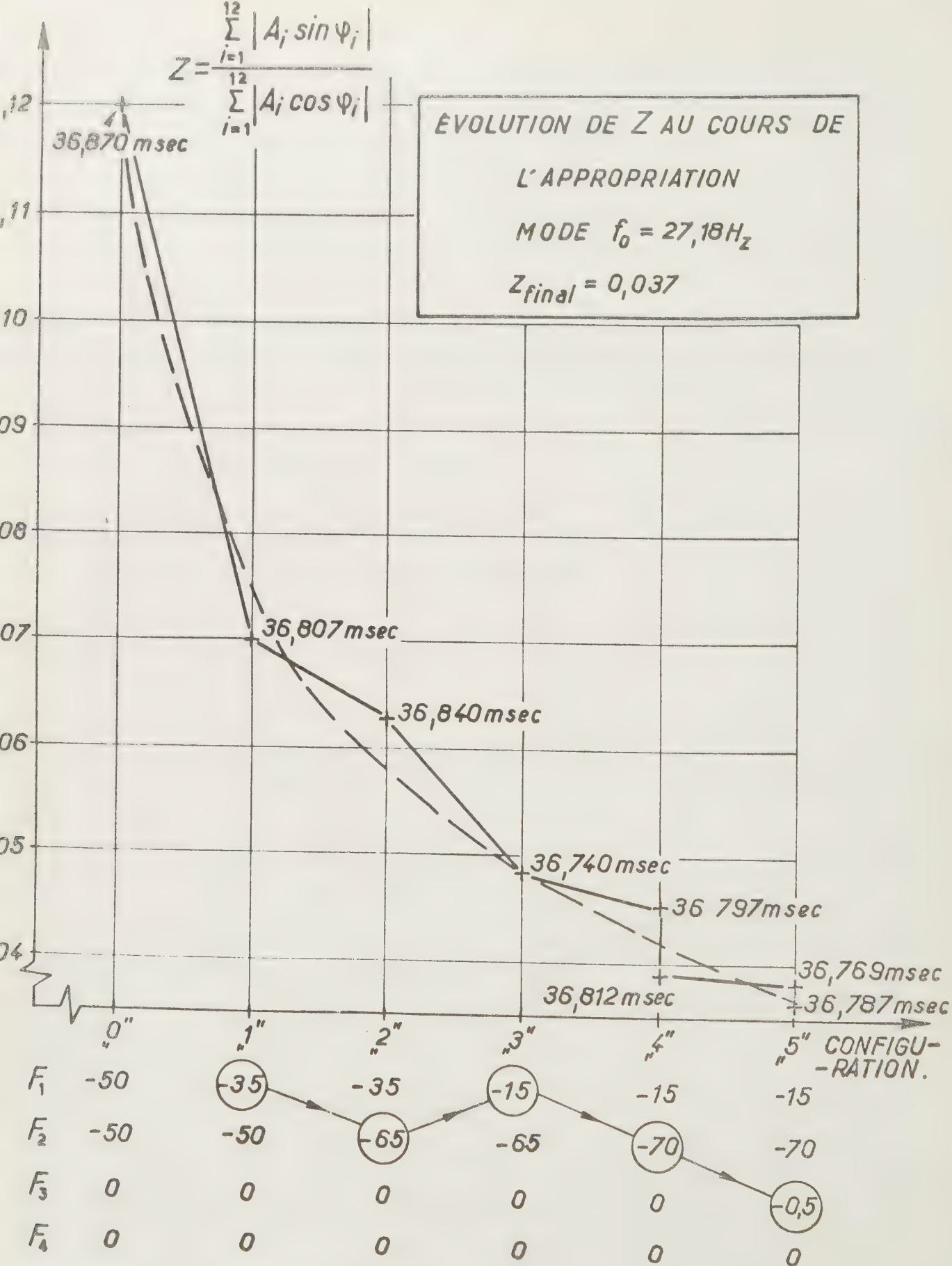


FIG. 29

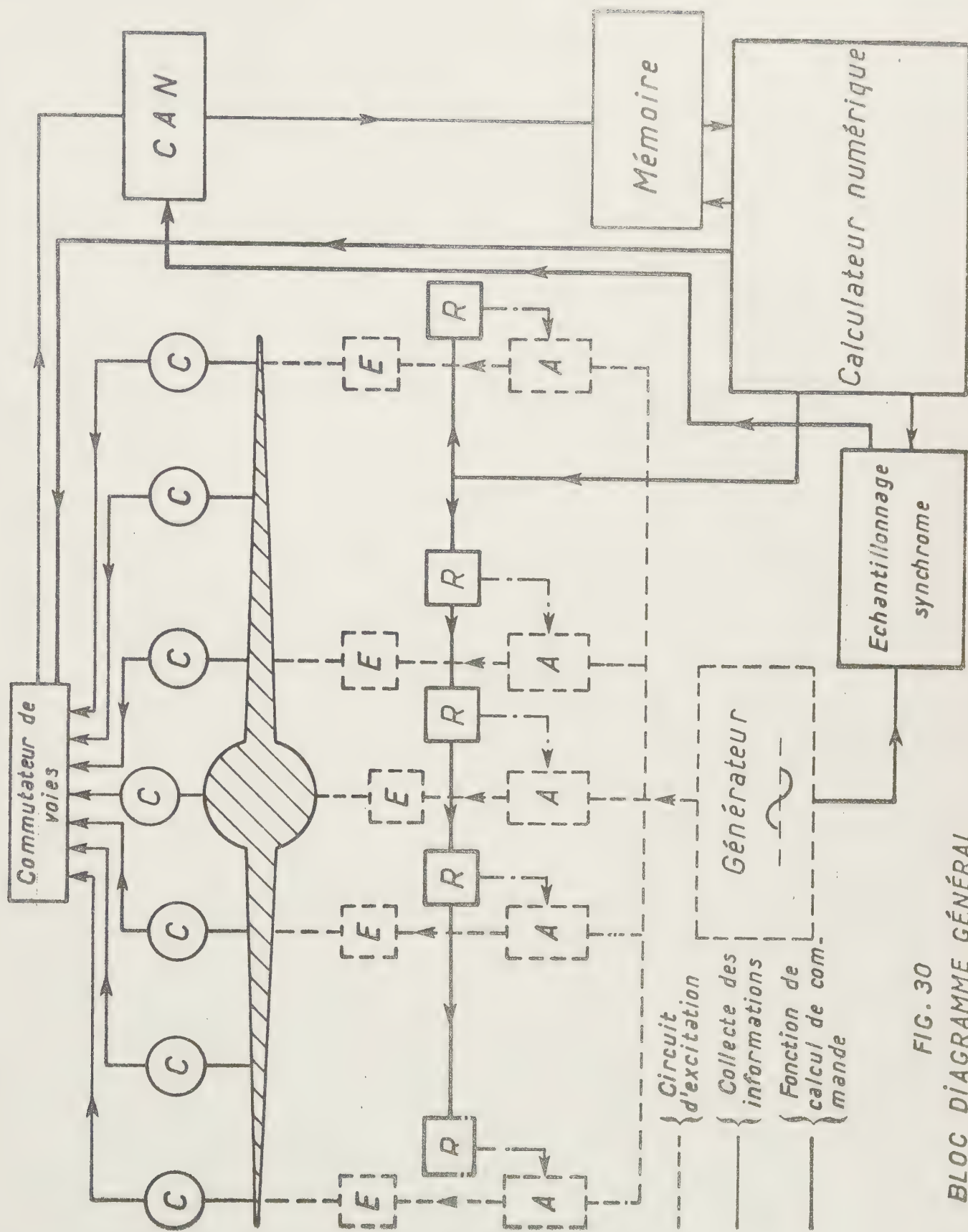


FIG. 30
BLOC DIAGRAMME GÉNÉRAL

$$y = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \longrightarrow y = a_1 \sin x + b_1 \cos x$$

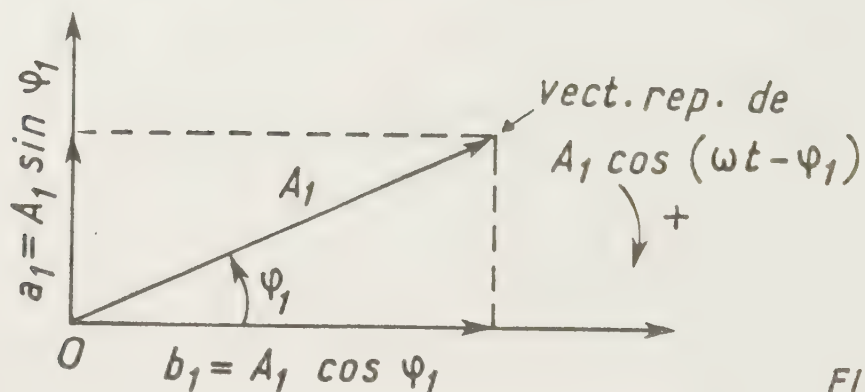
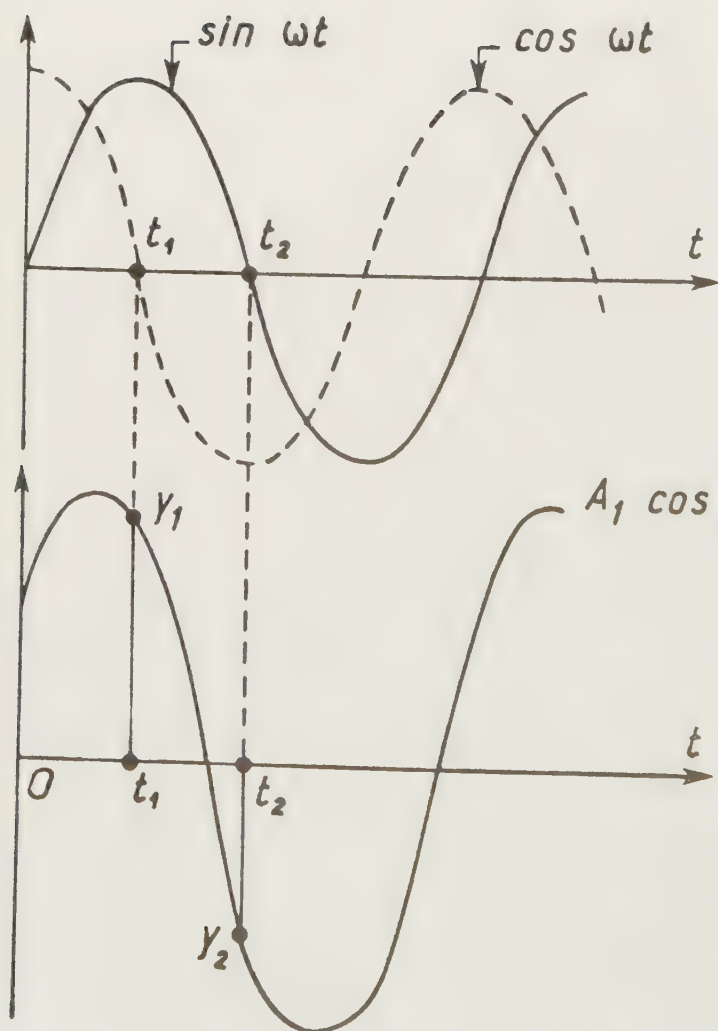


FIG. 31



EXCITATION

$$y_1 = A_1 \sin \varphi_1$$

$$y_2 = -A_1 \cos \varphi_1$$

RÉPONSE

FIG. 32

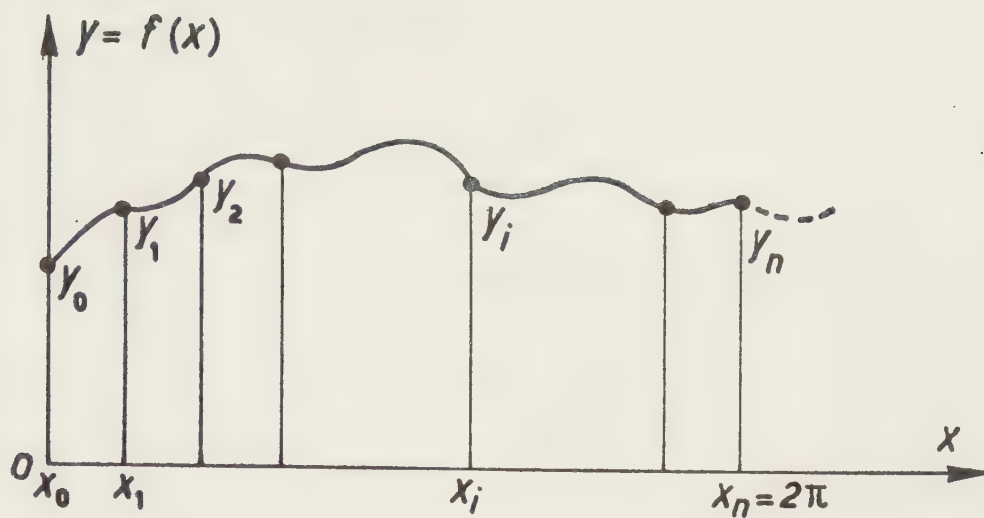


FIG. 33

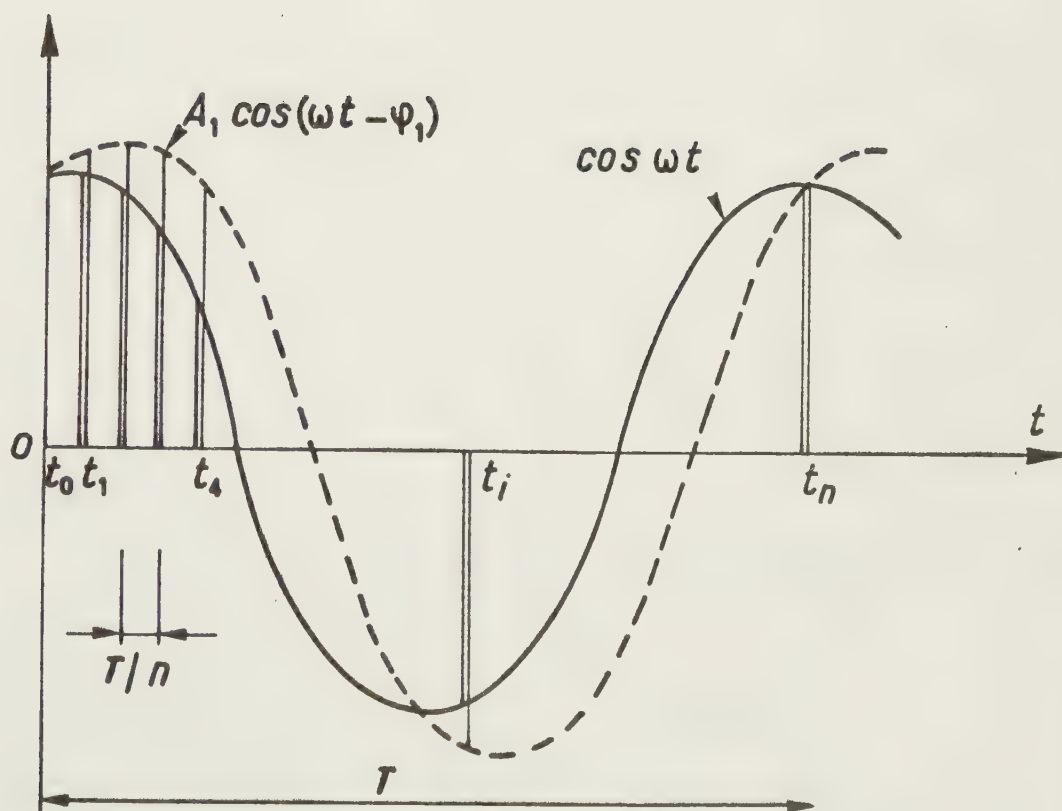
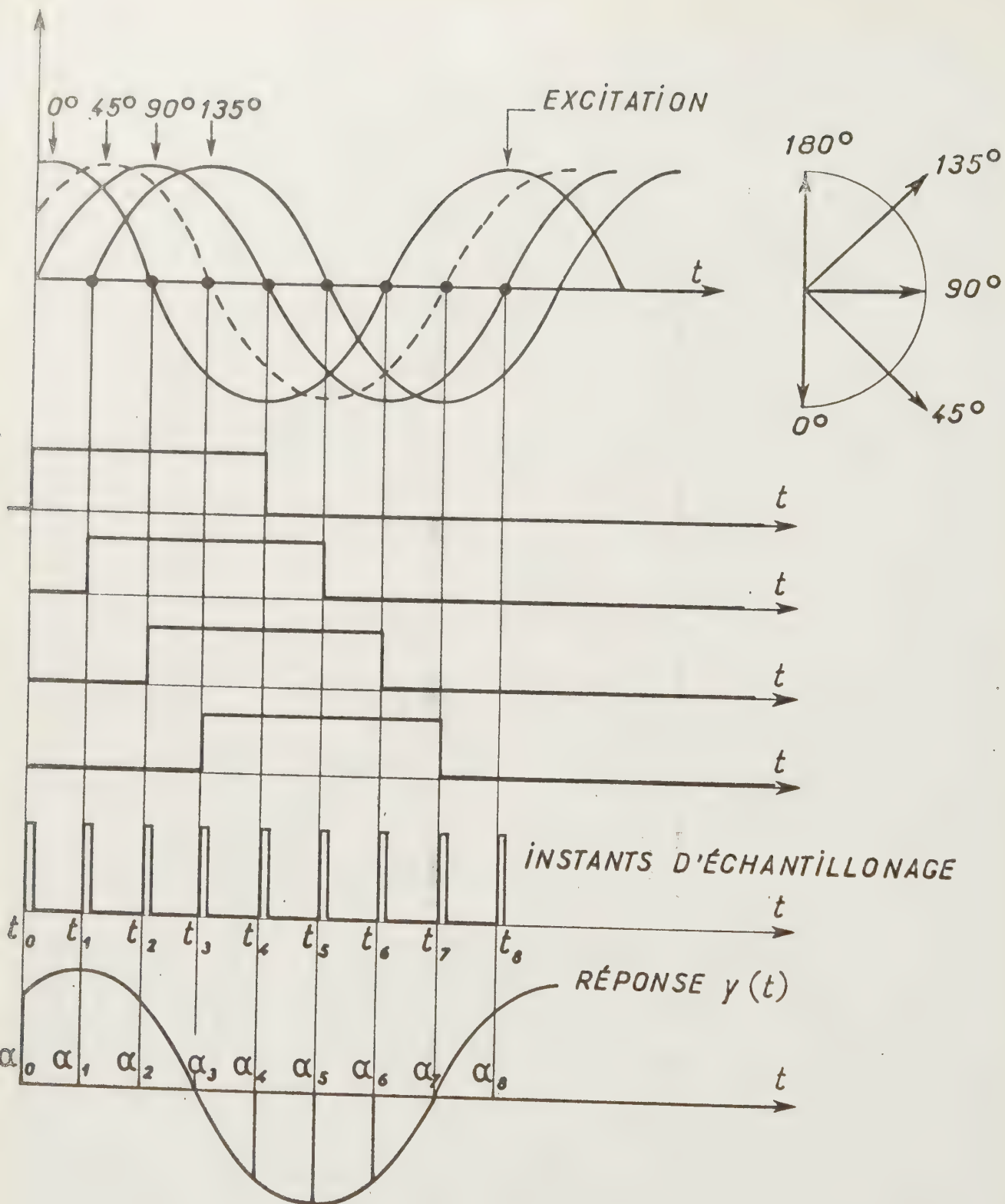


FIG. 34



RÉALISATION PRATIQUE (PRINCIPE)

FIG. 35

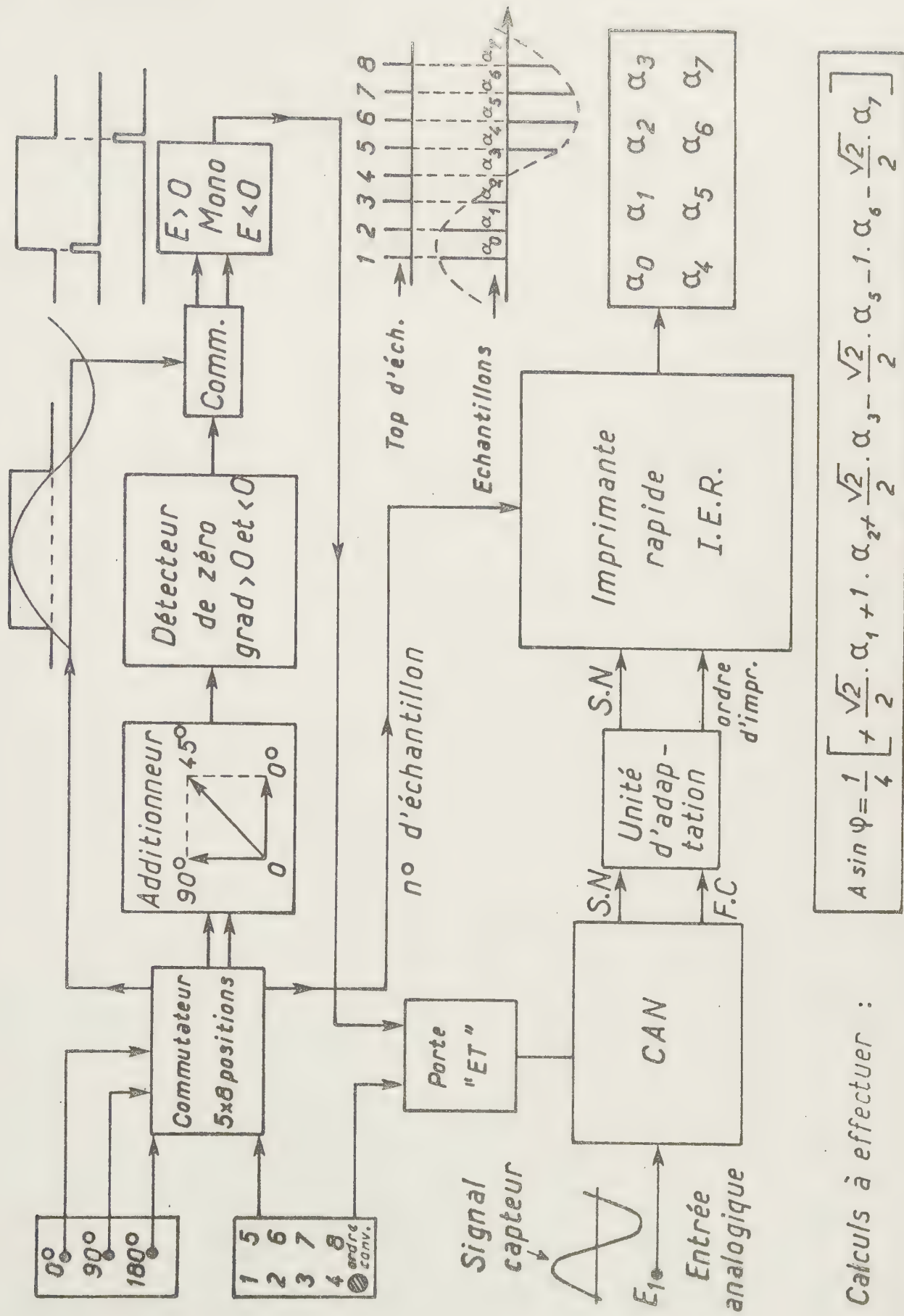


FIG. 36 - DISPOSITIF D'ÉCHANTILLONNAGE SYNCHRONE

$$R = \sum_{i=1}^6 |A_i \sin \varphi_i| = g_1(F_1) \text{ avec}$$

$$A_i \sin \varphi_i = \frac{1}{4} \left[+\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_1^i + 1 \cdot \alpha_2^i + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_3^i - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_5^i - 1 \cdot \alpha_6^i - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_7^i \right]$$

$$f_0 = 23,6 \text{ Hz}$$

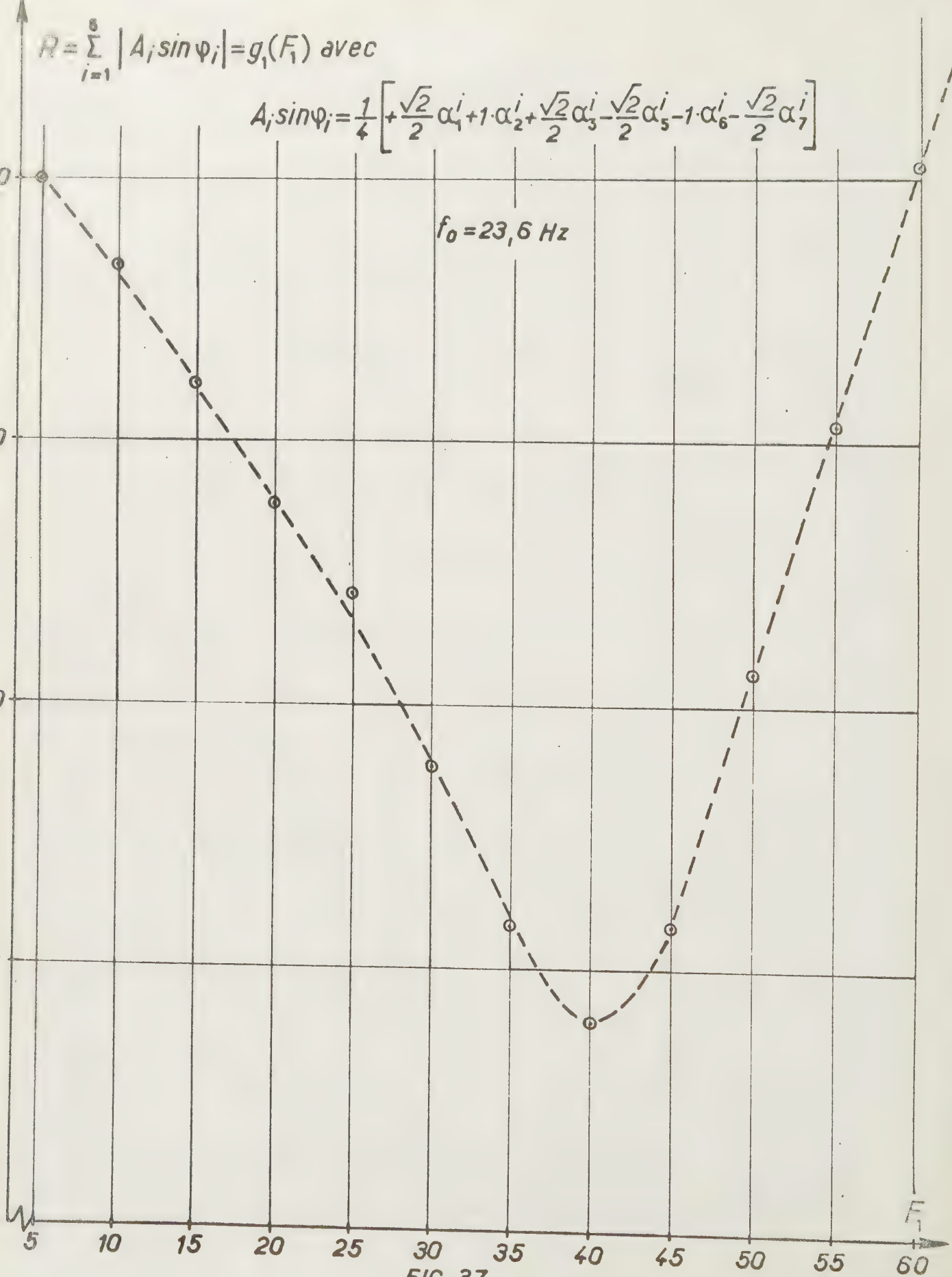


FIG. 37

ORGANIGRAMME

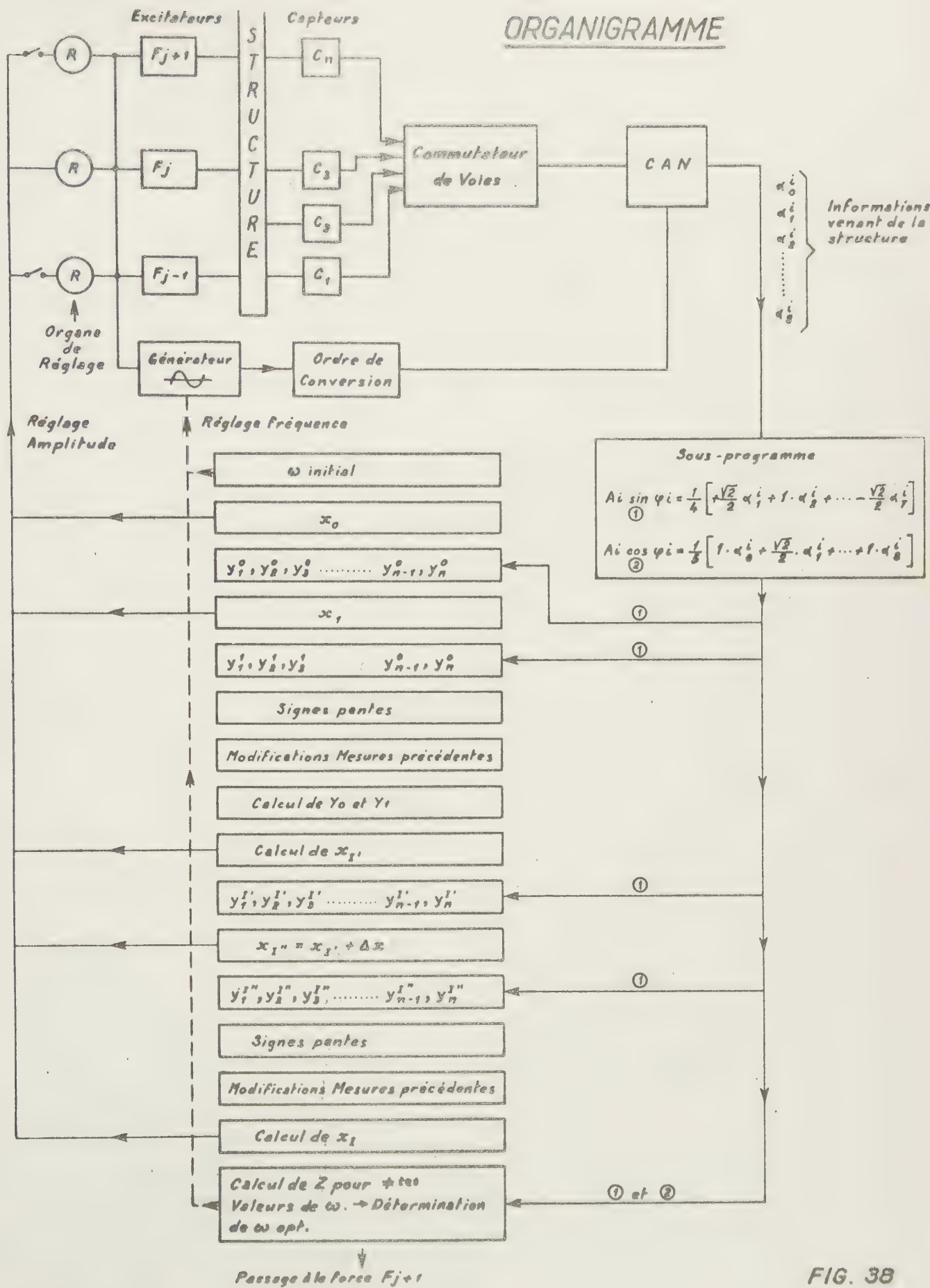


FIG. 38

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

INFLUENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR LES PROPRIÉTÉS DE TRANSPORT
DES GAZ FORMÉS DE MOLÉCULES POLYATOMIQUES

Vu et approuvé :

Paris, le 10 Juillet 1968

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

